

**J.E.N.367**

**Sp ISSN 0081-3397**

# **Implosiones en medios condensados inertes y detonantes**

**por**

**Amable Liñan  
Manuel Rodriguez**

**JUNTA DE ENERGIA NUCLEAR**

**MADRID, 1977**

## **CLASIFICACION INIS Y DESCRIPTORES**

**A13**

**FLUID MECHANICS**

**SHOCK WAVES**

**EXPLOSIONS**

**IMPLOSIONS**

**SPHERICAL CONFIGURATION**

**CYLINDRICAL CONFIGURATION**

**COMPRESSION**

Toda correspondencia en relación con este trabajo debe dirigirse al Servicio de Documentación Biblioteca y Publicaciones, Junta de Energía Nuclear, Ciudad Universitaria, Madrid-3, ESPAÑA.

Las solicitudes de ejemplares deben dirigirse a este mismo Servicio.

Los descriptores se han seleccionado del Tesauro del INIS para describir las materias que contiene este informe con vistas a su recuperación. Para más detalles consúltase el informe IAEA-INIS-12 (INIS: Manual de Indización) y IAEA-INIS-13 (INIS: Tesauro) publicado por el Organismo Internacional de Energía Atómica.

Se autoriza la reproducción de los resúmenes analíticos que aparecen en esta publicación.

Este trabajo se ha recibido para su impresión en Diciembre de 1976.

INDICE

Pág.

GENERAL

1.- Introducción .....	1
2.- Lista de Símbolos .....	5
3.- Ecuaciones del Movimiento .....	6
4.- Cambio de Variables .....	8

CAPITULO A.- CAMPO FLUIDO DETRAS DE UNA ONDA DE DETONACION PLANA. REFLEXION EN UNA PARED RIGIDA Y POSTERIOR EVOLUCION DE LA ONDA DE CHOQUE REFLEJADA.

1.- Introducción .....	11
2.- Lista de Símbolos .....	13
3.- Campo Fluido detrás de la Onda de Detonación antes de la Reflexión .....	14
4.- Reflexión en la Pared Totalmente Rígida. Instante inicial .....	19
5.- Campo Fluido detrás de la Onda de Choque Reflejada para Valores Pequeños de $t/t_0$ .....	21
6.- Conclusiones .....	25

CAPITULO B.- CAMPO FLUIDO DETRAS DE UNA ONDA DE CHOQUE PLANA, CILINDRICA O ESFERICA. SOLUCION PARA TIEMPOS PEQUEÑOS A PARTIR DEL INSTANTE INICIAL.

1.- Introducción .....	27
2.- Lista de Símbolos .....	28
3.- Desarrollos para Tiempos Pequeños .....	29

	Pag.
4.- Primer Término del Desarrollo .....	32
5.- Términos de Orden $x_s$ .....	35
6.- Términos de Orden $x_s^2$ .....	37
7.- Solución .....	40
8.- Cálculo de $\phi_0$ , $\phi_1(1)$ y $\phi_2(1)$ cuando se conoce la Ecuación de Estado $e_s = e_s(p_s, \rho_s)$ .....	41
8.1.- Caso de Gas Perfecto .....	43
8.2.- Caso en que la Ecuación que Expresa la Continuidad de la Energía a través de la Onda de Choque, se sustituye por la Relación Experimental $D=E+Gu_s$ ...	50
9.- Conclusiones .....	54

#### CAPITULO C.- CAMPO FLUIDO DETRAS DE UNA ONDA DE CHOQUE EN LAS ULTIMAS ETAPAS DE LA IMPLOSION.

1.- Introducción .....	59
2.- Lista de Simbolos .....	60
3.- Ecuaciones de Semejanza .....	61
4.- Método de Solución de las Ecuaciones Diferenciales..	69
5.1.- Solución para Valores Grandes de $\gamma$ .....	71
5.2.- Solución para $\gamma-1$ Pequeños .....	75
6.- Puntos Críticos .....	93
7.- Conclusiones .....	106

#### APENDICE C-I

1.- Introducción .....	109
2.- Trayectorias .....	109
3.- Presión a que esta Sometida la Capa Fluida .....	111
4.- Trayectoria y Presión de una Partícula Fluida en el caso $\gamma \rightarrow \infty$ .....	112
5.- Trayectoria y Presión de una Partícula Fluida en el caso $(\gamma-1) \rightarrow 0$ .....	114

REFERENCIAS .....	123
-------------------	-----

NOTA

El presente trabajo corresponde al Informe #1 del equipo ii) Propagación de ondas de choque en medios ultradensos, del Subprograma de la JEN sobre Confinamiento Inercial, Proyecto Laser-Fisión-Fusión, descrito en el Informe JEN-351.

## GENERAL

### 1.- INTRODUCCION.

El presente trabajo tiene por objeto la descripción analítica del proceso de compresión hidrodinámica de un material condensado, de forma esférica (cilíndrica), sometido a una presión exterior generada por una irradiación laser intensa, o por compresión debida a la energía liberada en una cáscara esférica (cilíndrica) exterior.

El análisis permite describir tanto el proceso de compresión de bolas líquidas, como la compresión de materiales sólidos sometidos a presiones elevadas, por ser en ese caso despreciable los esfuerzos tangenciales frente a los normales de presión; el material sólido a presiones y temperaturas elevadas se comporta como un fluido (Zel'dovich, Ya. B. y Raizer, Yu. P.; 1966).

Cuando la superficie exterior de la esfera (cilindro) de fluido es sometida a una presión variable con el tiempo, sus capas exteriores adquieren un movimiento radial hacia el interior, presionando las capas interiores. Las ondas sucesivas de compresión, procedentes de la superficie de la bola, se mueven en un medio ya comprimido con una velocidad de propagación superior a la de las primeras ondas (Whitham, G.B.; 1974), (Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.; 1959). Cuando la presión exterior es rápidamente creciente, las ondas de compresión iniciales son alcanzadas por las ondas sucesivas pudiendo generar, por superposición de sus efectos, ondas de choque esféricas, que viajan a velocidad supersónica hacia el centro de la bola.

La sobrepresión existente en el lado exterior de la onda, induce un movimiento radial convergente del fluido, que es reforzado por las ondas de compresión que viajan detrás de la onda de choque. Estas ondas de compresión posteriores aparecen de modo forzado cuando la presión en la superficie exterior de la bola continúa creciendo, y de modo natural por la necesidad de acelerar el fluido, que en su movimiento convergente se encuentra con una

sección de paso decreciente. Así pues, en tanto persista el movimiento convergente del fluido, las ondas de compresión que viajan hacia el centro de la esfera, alcanzan a la onda de choque y aumentan su intensidad. Este proceso se denomina implosión.

Cuando la onda de choque alcanza el centro de la bola, se refleja en forma de una nueva onda de choque esférica que se propaga hacia el exterior, oponiéndose al movimiento convergente del fluido generado por la onda implosiva. La onda explosiva originada se atenúa a medida que se separa del centro, al ser alcanzada por ondas de expansión que se generan para disminuir la velocidad radial divergente del fluido, que se encuentra con secciones de paso crecientes.

El proceso de compresión puede describirse con ayuda de las ecuaciones de Euler (Courant, R. y Friedrichs, K.O.; 1948) (Stanyukovich, K.P.; 1960), forma simplificada de las ecuaciones de Navier-Stokes, donde son despreciables los efectos viscosos y de conducción de calor en todo el campo fluido, como consecuencia de los valores tan altos del número de Reynolds que se alcanzan. Estos efectos aparecen en las condiciones de salto de las magnitudes fluidas a través de la onda de choque (Landau, L. D. y Lifshitz, E.M.; 1959).

La presión en la superficie exterior de la bola puede generarse por una irradiación laser intensa o bien por una onda de detonación iniciada en una cáscara externa de material detonante. En este último caso, la presión en la superficie exterior de la bola sube bruscamente a un valor  $p_{s0}$  y posteriormente decrece con el tiempo.

Cuando en un medio detonante esférico (cilíndrico) o en forma de cásrara esférica (cilíndrica), se inicia la detonación de la superficie exterior, esta se propaga hacia el interior como una onda de choque que comprime y calienta bruscamente al material detonante de manera que reacciona exotérmicamente inmediatamente después. Los productos de la combustión quedan moviéndose hacia el interior con una velocidad aproximadamente la



cuarta parte de la onda. El material, que conserva su estado termodinámico inicial hasta ser alcanzado por la onda de choque, se mueve adiabáticamente tras el cortísimo periodo de reacción iniciado con el paso de la onda. La onda de choque seguida de la zona de reacción se llama onda de detonación. La onda de detonación va seguida de un sistema de ondas de expansión, de manera que las partículas del medio detonado terminan perdiendo la velocidad implosiva comunicada por la onda y adquiriendo una velocidad radial expansiva.

Para calcular la trayectoria de la onda de detonación y las distribuciones de presión, velocidad y densidad detrás de la onda, hay que integrar las ecuaciones de Euler del movimiento con las condiciones de contorno deducidas de las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot en la onda de detonación (Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.; 1959), (Aguilar, F.; 1972).

En el capítulo A se han analizado los siguientes problemas: 1º) La propagación de una onda de detonación plana en un medio semi-infinito cuando la superficie límite donde se inicia la detonación es una superficie libre (de presión nula) y cuando se trata de una superficie rígida. 2º) análisis de los primeros instantes del proceso de reflexión y transmisión en forma de ondas de choque, de la onda de detonación plana que alcanza un medio semi-infinito casi inerte. Se ha calculado el factor por el que hay que multiplicar la presión detrás de la onda de detonación incidente, para obtener la presión inicial,  $p_{s0}$ , sobre el material a comprimir. También se ha calculado el ritmo inicial de decrecimiento de la citada presión. Problemas análogos han sido estudiados, con procedimientos analíticos aproximados, por (Stanyukovich, K.P.; 1960) y mediante análisis numérico por (Fickett, W.; 1974).

En el capítulo B se describen los primeros momentos del proceso de compresión de una bola cuya superficie está sometida a una presión que en  $t=0$  sube bruscamente a un valor  $p_{s0}$  y posteriormente evoluciona con el tiempo. Se obtiene la solución de las ecuaciones de Euler escribiendo las distribuciones de presión, densidad y velocidad en forma de desarrollos en poten-

cias del tiempo  $t$ , o su equivalente; en potencias de la distancia recorrida por la onda de choque, medida desde el radio inicial. Como parte de la solución se obtienen las posiciones de la superficie exterior de la bola y de la onda de choque. Estos cálculos se han realizado para ecuaciones de estado del medio fluido arbitrarias.

La solución obtenida, cuando la presión en la superficie exterior no varía mucho con el tiempo, puede describir el proceso implosivo hasta que la onda de choque ha alcanzado radios del orden de la mitad del inicial. No es posible, sin embargo, obtener soluciones analíticas de las ecuaciones de Euler, que sean válidas en cualquier instante. Para obtener una solución válida en todo el campo es necesario integrar las ecuaciones, bien utilizando el método de las características (Courant, R. y Friedrichs, K.O.; 1948), (Stanyukovich, K.P.; 1960), o bien utilizando algún método de incrementos finitos y modelo de viscosidad artificial como el de Von Neumann.

En los últimos momentos del proceso implosivo, la onda de choque se hace muy intensa. La velocidad de la onda y las presiones generadas inmediatamente detrás de ella, tiende a infinito cuando su radio tiende a cero; sin embargo la densidad se mantiene finita.

Es posible describir la distribución de presiones, densidades y velocidades en los últimos momentos de la implosión mediante una solución de semejanza de las ecuaciones de Euler (Guderley, G.; 1942), (Sedov, L.I.; 1959), válida para medios con ecuaciones de isentropía de la forma  $p/\rho^\gamma$  constante.

Para sólidos sometidos a presiones elevadas, la relación de calores específicos,  $\gamma$ , no es constante; sino que varía lentamente con la presión. Sin embargo, la descripción del proceso de compresión en la región central puede hacerse con buena aproximación suponiendo  $\gamma$  constante, si se elige el valor apropiado para la gama de presiones alcanzadas. Por esta razón es aconsejable hacer una descripción de la solución de semejanza para todos los valores de  $\gamma$  del intervalo  $(1, \infty)$ .

Existen integraciones numéricas para  $\gamma=1.2, 1.4, 5/3$  y  $3$  (Guderley, G.; 1942), (Butler, D.S.; 1954), (Welsh, R.L.; 1957), (Somon, J.P.; 1971). En el capítulo C se completan estos cálculos numéricos con una descripción analíti-

ca de la solución para valores de  $(\gamma-1)$  pequeños y el comportamiento asintótico para  $\gamma \rightarrow \infty$ . También se incluye un análisis de los puntos críticos de las ecuaciones, necesario para el posterior cálculo numérico con cualquier valor  $\gamma$ . La solución numérica de las ecuaciones, que describen las últimas etapas de la implosión como las primeras de la explosión, se presentará en un trabajo posterior.

Las soluciones analíticas obtenidas tanto para los primeros como los últimos instantes del proceso de implosión, no solo son de utilidad para la información cualitativa y cuantitativa que proporcionan sobre el proceso de implosión, sino que además pueden utilizarse como soluciones de prueba de procedimientos y códigos de integración numérica de las ecuaciones.

## 2.- LISTA DE SIMBOLOS.

La lista de símbolos que se da a continuación es válida para todos los capítulos. Los símbolos específicos de cada capítulo se indicarán al comienzo de cada uno.

- c, Velocidad del sonido en el medio.
- $c_p$ , Calor específico a presión constante.
- $c_v$ , Calor específico a volumen constante.
- D, Velocidad de propagación de la onda.
- e, Energía interna por unidad de masa.
- f, Presión adimensionalizada  $f=p/\rho_0 D^2$ .
- j, Factor geométrico.  $j=0$ , caso plano.  $j=1$ , caso cilíndrico.  $j=2$ , caso esférico.
- p, Presión.
- q, Calor liberado por unidad de masa en la combustión del material detonante.
- r, Coordenada radial.
- $R_0$ , Posición de la superficie exterior en el instante inicial.
- $R_s$ , Posición instantánea de la onda de choque.

- S, Entropía.  
s, Entropía específica.  
t, Tiempo.  
u, Velocidad.  
 $x_s$ , Definido en ecuación (4.2)  
 $\xi$ , Definido en ecuación (4.1)  
 $\phi$ , Velocidad adimensional  $\phi=u/D$ .  
 $\psi$ , Densidad adimensional  $\psi=\rho/\rho_0$ .  
 $\gamma$ , Relación de calores específicos  $\gamma=c_p/c_v$ .  
 $\rho$ , Densidad.  
 $\rho_0$ , Densidad del material no alcanzado por la onda.  
 $\theta_s$ , Definido en ecuación (4.7).

### 3.- ECUACIONES DEL MOVIMIENTO.

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento unidireccional de un fluido no viscoso y sin conducción de calor son: (Stanyukovich, K.P.; 1960).

- Ecuación de la continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{\rho u}{r} = 0 \quad (3.1)$$

- Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3.2)$$

- Ecuación de la energía:

$$\frac{Ds}{Dt} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} \right) s = 0 \quad (3.3)$$

Estas ecuaciones han de ir acompañadas de las ecuaciones de estado necesarias, condiciones iniciales y condiciones de contorno.

En lo relativo a las ecuaciones de estado, a la vista de la ecuación de la energía (3.3), solo necesitamos conocer la entropía específica,  $s$ , como una función arbitraria de una función entrópica  $S$ , función conocida de la densidad y de la presión, es decir:

$$s = s \{ S(p, \rho) \} \quad (3.4)$$

Con ayuda de la ecuación de estado (3.4), la ecuación de la energía (3.3), se puede escribir:

$$\frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{\gamma(p, \rho)}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3.5)$$

Para lo cual hemos puesto:

$$\left[ \left( \frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_p / \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_\rho \right] = - \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = -c^2 = - \frac{p}{\rho} \gamma(p, \rho) \quad (3.6)$$

$\gamma$  es la relación de calores específicos  $c_p/c_v$ , que es una función de la presión, y la densidad.  $c$  es la velocidad del sonido en el medio, también función de la presión y la densidad.

Utilizaremos estas ecuaciones para la región comprendida entre la superficie exterior del material y la onda.

En lo relativo a las condiciones de contorno, las condiciones que hemos de imponer son las condiciones de salto a través de la onda (de choque o de detonación).

Para ondas muy intensas (presión detrás de la onda mucho mayor que la presión delante), las condiciones de salto a través de la onda son:

$$\rho_s(D-u_s) = \rho_0 D \quad (3.7)$$

$$p_s + \rho_s(D-u_s)^2 = \rho_0 D^2 \quad (3.8)$$

$$e_s + q + \frac{p_s}{\rho_s} + \frac{1}{2} (D-u_s)^2 = \frac{1}{2} D^2 \quad (3.9)$$

donde el subíndice s se refiere al estado del fluido detrás de la onda, D es la velocidad de propagación de la onda,  $\rho_0$  es la densidad del material delante de la onda y q es el calor, por unidad de masa, liberado en la combustión del material detonante al paso de la onda. q es cero en el caso de ondas de choque y es un dato que depende del material detonante en el caso de ondas de detonación. La velocidad y posición de la onda han de calcularse como una parte más de la solución del problema.

#### .- CAMBIO DE VARIABLES.

La onda va a estar situada a una distancia  $R_s$  que en general dependerá del tiempo. Con objeto de situarla en una coordenada fija, vamos a utilizar la variable  $\xi$  definida como:

$$\xi = \frac{r - R_0}{R_s - R_0} \quad (4.1)$$

de esta forma, la onda está situada siempre en  $\xi = 1$ .

Como tiempo adimensional utilizaremos una variable equivalente, que va a ser la posición instantánea de la onda de choque, es decir:

$$x_s = \frac{R_s - R_0}{R_0} \quad (4.2)$$

$x_s$  es nula en el instante inicial ( $R_s=R_0$ ) y vale -1 cuando la onda llega a  $r=0$  ( $R_s=0$ ).

A la vista de las ecuaciones (3.7) y (3.8), como variables dependientes utilizaremos:

$$\psi(\xi, x_s) = \frac{\rho(r, t)}{\rho_0}; \quad \phi(\xi, x_s) = \frac{u(r, t)}{D(t)}; \quad f(\xi, x_s) = \frac{p(r, t)}{\rho_0 D^2(t)} \quad (4.3)$$

Con los cambios de variable (4.1), (4.2) y (4.3), las ecuaciones del movimiento (3.1), (3.2) y (3.5) se pueden escribir como:

$$(\phi - \xi) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \psi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + x_s \frac{\partial \psi}{\partial x_s} = - \frac{j x_s \phi \psi}{1 + x_s \xi} \quad (4.4)$$

$$(\phi - \xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial f}{\partial \xi} + x_s \frac{\partial \phi}{\partial x_s} = -\theta_s \phi \quad (4.5)$$

$$(\phi - \xi) \left[ \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\gamma f}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + x_s \left[ \frac{\partial f}{\partial x_s} - \frac{\gamma f}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_s} \right] = -2\theta_s f \quad (4.6)$$

$$\text{siendo} \quad \theta_s = \frac{x_s \ddot{x}_s}{\dot{x}_s^2} \quad (4.7)$$

$\dot{x}_s$  y  $\ddot{x}_s$  representan la derivada primera y segunda de  $x_s$  con respecto al tiempo.

Las condiciones en la onda (3.7), (3.8) y (3.9) quedan:

$$\psi(1, x) = \frac{1}{\dots} \quad (4.8)$$

$$f(1, x_s) = \phi(1, x_s) \quad (4.9)$$

$$\frac{e_s + q}{D^2} = \frac{1}{2} \phi^2(1, x_s) \quad (4.10)$$

Estas ecuaciones han de ser acompañadas por una condición de contorno adicional en la superficie libre, cuya posición  $\xi_{sL}(x_s)$  ha de determinarse, y por las condiciones iniciales apropiadas. Como parte de la solución se obtendrá  $x_s(t)$  y por lo tanto  $\theta_s(t)$  y  $D(t)$ .



## CAPITULO A

### CAMPO FLUIDO DETRAS DE UNA ONDA DE DETONACION PLANA. REFLEXION EN UNA PARED RIGIDA Y POSTERIOR EVOLUCION DE LA ONDA DE CHOQUE REFLEJADA.

#### 1.- INTRODUCCION.

En este capítulo estudiaremos el campo fluido detrás de una onda de detonación plana, su reflexión en forma de una onda de choque en una pared rígida y su posterior evolución, para tiempos pequeños a partir del instante de la reflexión.

Los productos de la detonación quedan moviéndose detrás de la onda de detonación homentrópicamente, debido a que la onda avanza con velocidad constante.

Cuando la onda de detonación alcanza la pared rígida, se refleja en ella como una onda de choque, puesto que los productos de la detonación se encuentran ya quemados. Como la onda de detonación pone en movimiento a los productos de la combustión, la onda de choque reflejada se encuentra con un fluido en movimiento y con un campo de presiones y densidades variables. En estas condiciones el movimiento detrás de la onda de choque reflejada no puede considerarse homentrópico. Cada partícula alcanzada por la onda de choque aumenta su entropía y la conserva posteriormente, pero este aumento de entropía es distinto para partículas alcanzadas por la onda de choque en instantes diferentes.

En la Fig. A01 se presenta un esquema del problema a resolver.

El mismo problema que aquí presentamos fué tratado numéricamente por (Fickett, W.; 1974), para casos en que la superficie donde se refleja la onda de detonación no es rígida. Un problema análogo a la reflexión de la onda de detonación en la pared rígida fué estudiado por (Stanyukovich, K.P.; 1960) admitiendo que después de la reflexión el movimiento es homentrópico y utilizando la solución general del movimiento homentrópico y no estacionario de un gas.

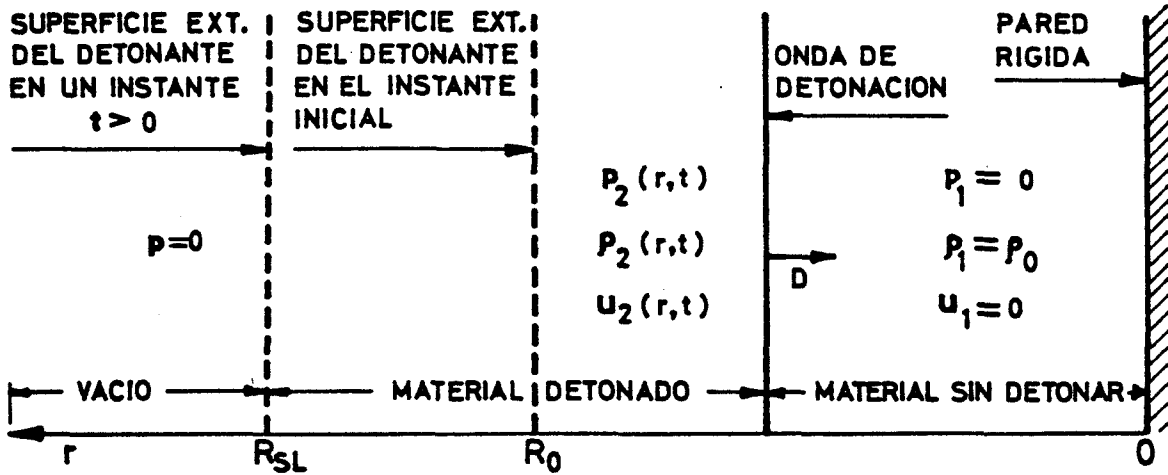


Fig. A01.- Diagrama del problema a resolver en el capítulo A.

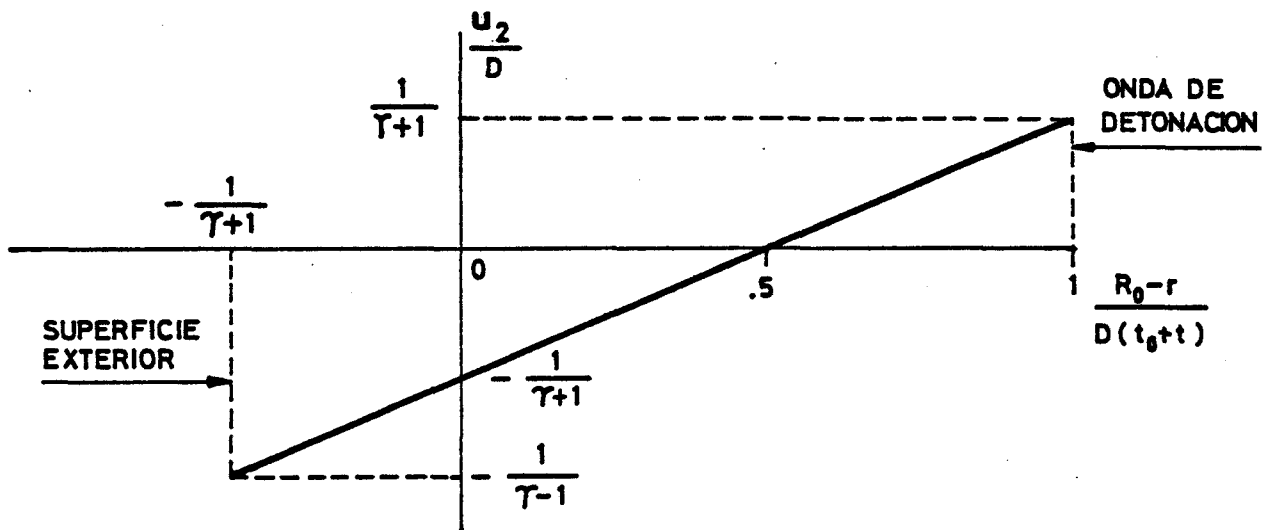


Fig. A02.- Campo de velocidades detrás de la onda de detonación como función de la posición y del tiempo. Superficie exterior libre.

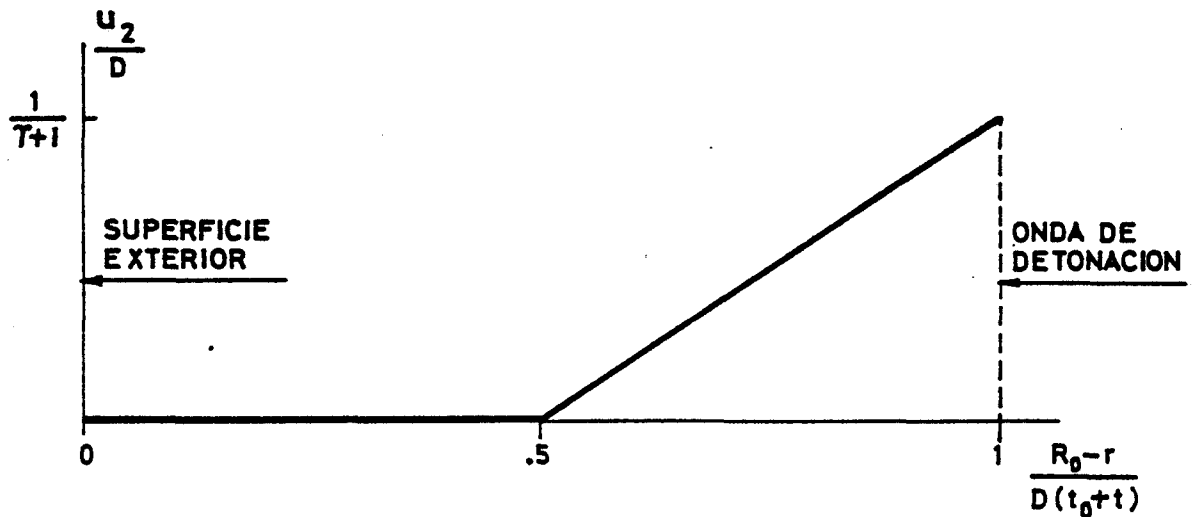


Fig. A03.- Campo de velocidades detrás de la onda de detonación como función de la posición y del tiempo. Superficie exterior rígida.

## 2.- LISTA DE SIMBOLOS.

Los símbolos que se dan a continuación complementan a la lista general de símbolos y son específicos de este capítulo.

- a, Coeficiente que determina la velocidad y presión detrás de la onda de choque reflejada. Ecuaciones (A5.13) y (A5.14).
- b, Coeficiente que, junto con a, determina la densidad detrás de la onda de choque reflejada. Ecuación (A5.15).
- e, Coeficiente que determina la velocidad de propagación de la onda de choque reflejada. Ecuación (A5.16).
- F, Definido en la ecuación (A5.8).
- H, Definido en la ecuación (A5.9).
- $\bar{p}$ , Definido como  $p_3/p_{30s}$ .
- $t_0$ , Tiempo que tarda la onda de detonación en llegar a la pared rígida.
- $\bar{u}$ , Definido como  $u/D$ .
- v, Definido en la ecuación (A5.7).
- $\omega$ , Velocidad de propagación de la onda de choque reflejada.
- $\omega_0$ , Velocidad de propagación de la onda de choque reflejada en el instante inicial.
- x, Definido como  $r/R_0$ .
- $\zeta$ , Definido en la ecuación (A3.4).
- $\pi$ , Definido como  $p_{30s}/p_{20s}$ . Ecuación (A4.4).

$\bar{\rho}$ , Definido como  $\rho_3/\rho_{30s}$ .

$\tau$ , Definido como  $t/t_0$ .

Subíndices:

2, Magnitudes detrás de la onda de detonación.

3, Magnitudes detrás de la onda de choque reflejada.

20s } Magnitudes justamente en la onda de choque o de detonación en el ins  
30s } tante de la reflexión ( $t=0$ ).

2s } Magnitudes justamente en la onda de choque o de detonación en cual-  
3s } quier instante distinto de  $t=0$ .

#### .- CAMPO FLUIDO DETRÁS DE LA ONDA DE DETONACIÓN ANTES DE LA REFLEXIÓN.

Este movimiento es homentrópico, pues la onda de detonación avanza con velocidad constante y genera en todas las partículas el mismo salto de entropía.

Las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.5) para el movimiento plano e isentrópico de un gas perfecto quedan:

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \rho_2 \frac{du_2}{dr} + u_2 \frac{\partial p_2}{\partial r} = 0 \quad (A3.1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r} = 0 \quad (A3.2)$$

$$\frac{p_2}{\rho_2^\gamma} = \text{constante} \quad (A3.3)$$

haciendo el cambio de variable

$$\zeta = \frac{R_0 - r}{t_0 + t} \quad (\text{A3.4})$$

donde  $t$  es el tiempo medido desde el instante en que la onda de detonación llega a  $r=0$ .

Las ecuaciones (A3.1), (A3.2) y (A3.3) se reducen a:

$$(u_2 - \zeta) \frac{d\rho_2}{d\zeta} + \rho_2 \frac{du_2}{d\zeta} = 0 \quad (\text{A3.5})$$

$$\frac{c_2^2}{\rho_2} \frac{d\rho_2}{d\zeta} + (u_2 - \zeta) \frac{du_2}{d\zeta} = 0 \quad (\text{A3.6})$$

$$c_2^2 = \gamma \frac{p_2}{\rho_2} \quad (\text{A3.7})$$

Para que el sistema de ecuaciones (A3.5) y (A3.6) tenga solución distinta de la uniforme,  $d(\zeta)/d\zeta=0$ , ha de ocurrir

$$\begin{vmatrix} u_2 - \zeta & \rho_2 \\ c_2^2/\rho_2 & u_2 - \zeta \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A3.8})$$

La ecuación (A3.8) nos da

$$\zeta = u_2 \pm c_2$$

en esta ecuación elegimos el signo "más", debido a que la presión ha de alcanzar su valor máximo detrás de la onda de detonación. Por tanto:

$$\zeta = u_2 + c_2 \quad (A3.9)$$

Con (A3.9) y (A3.5) ó (A3.6) obtenemos:

$$\frac{u_2}{u_{2s}} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{c_{2s}}{u_{2s}} \left[ \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_{2s}}{c_{2s}} - 1 + \frac{\zeta}{c_{2s}} \right] \quad (A3.10)$$

$$\frac{c_2}{c_{2s}} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{\zeta}{c_{2s}} - \frac{2}{\gamma+1} \left[ \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_{2s}}{c_{2s}} - 1 \right] \quad (A3.11)$$

$$\frac{p_2}{p_{2s}} = \left( \frac{c_2}{c_{2s}} \right)^{2\gamma/\gamma-1} \quad (A3.12)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_{2s}} = \left( \frac{c_2}{c_{2s}} \right)^{2/\gamma-1} \quad (A3.13)$$

el subíndice 2s indica el valor de las magnitudes justo detrás de la onda de detonación.

Por la hipótesis de CHAPMAN & JOUGUET (Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.; 1959) la velocidad de propagación de una onda de detonación, relativa a unos ejes que se mueven con la velocidad del fluido inmediatamente detrás de la onda,  $u_{2s}$ , es igual a la velocidad del sonido en el fluido justo detrás de la onda,  $c_{2s}$ .

Para unos ejes ligados a tierra será:

$$D = u_{2s} + c_{2s} \quad (A3.14)$$

Con la ecuación (A3.14), las condiciones detras de la onda de detonación (3.7), (3.8) y (3.9) quedan:

$$\frac{\rho_{2s}}{\rho_0} = \frac{\gamma+1}{\gamma} \quad (A3.15) \quad ; \quad \frac{p_{2s}}{\rho_0 D^2} = \frac{1}{\gamma+1} \quad (A3.16)$$

$$\frac{u_{2s}}{D} = \frac{1}{\gamma+1} \quad (A3.17) \quad ; \quad \frac{c_{2s}}{D} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \quad (A3.18)$$

$$D = \sqrt{2(\gamma^2-1)q} \quad (A3.19)$$

Con las condiciones (A3.15) a (A3.18), las ecuaciones (A3.10), (A3.12) y (A3.13) se reducen a:

$$u_2 = \frac{D}{\gamma+1} \left[ \frac{2(R_0-r)}{D(t_0+t)} - 1 \right] \quad (A3.20)$$

$$p_2 = \frac{\rho_0 D^2}{\gamma+1} \left\{ \frac{1}{\gamma} \left[ 1+(\gamma-1) \frac{R_0-r}{D(t_0+t)} \right] \right\}^{2\gamma/\gamma-1} \quad (A3.21)$$

$$\rho_2 = \rho_0 \frac{\gamma+1}{\gamma} \left\{ \frac{1}{\gamma} \left[ 1+(\gamma-1) \frac{R_0-r}{D(t_0+t)} \right] \right\}^{2/\gamma-1} \quad (A3.22)$$

La posición de la superficie exterior, donde  $p_2 = 0$ , viene dada por:

$$R_{SL} = R_0 + D \frac{t_0 + t}{\gamma - 1} \quad (A3.23)$$

El tiempo que la onda de detonación tarda en alcanzar la pared rígida,  $t_0$ , es:

$$t_0 = - \frac{R_0}{D} \quad (A3.24)$$

En la Fig. A02 se ha representado el campo de velocidades en función de la variable de semejanza  $\frac{R_0 - r}{D(t_0 + t)}$ .

En el caso en que la superficie exterior se mantuviese siempre en  $R_0$ , debido a una pared rígida que la soportase, el campo de velocidades sería el representado en la Fig. A03. En este caso, las expresiones analíticas de la solución serían:

a) Intervalo  $\frac{1}{2} \leq \frac{R_0 - r}{D(t_0 + t)} \leq 1$ . Son válidas las mismas expresiones (A3.20), (A3.21) y (A3.22) del caso sin pared rígida.

b) Intervalo  $0 \leq \frac{R_0 - r}{D(t_0 + t)} \leq \frac{1}{2}$ .

$$u_2 = 0 \quad (A3.25)$$

$$p_2 = \frac{\rho_0 D^2}{\gamma + 1} \left( \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right)^{2\gamma/\gamma - 1} \quad (A3.26)$$

$$\rho_2 = \rho_0 \frac{\gamma + 1}{\gamma} \left( \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right)^{2/\gamma - 1} \quad (A3.27)$$



#### 4.- REFLEXION EN LA PARED TOTALMENTE RIGIDA. INSTANTE INICIAL.

Cuando la onda de detonación se encuentra con la pared rígida ( $r=0$ ,  $t=0$ ), se refleja como una onda de choque, puesto que se encuentra con los gases producto de la detonación que ya no son inflamables. La Fig. A04 es un esquema de la onda de detonación antes de la reflexión y la onda de choque después de la reflexión.

Las condiciones de salto a través de la onda de detonación en cualquier instante, en particular un instante antes de la reflexión y las condiciones de salto a través de la onda de choque un instante después de la reflexión, nos proporcionan las ecuaciones necesarias para determinar la presión, densidad y velocidad de la onda de choque reflejada en el instante de la reflexión.

Las condiciones de salto a través de la onda de detonación son las ecuaciones (A3.15), (A3.16), (A3.17) y (A3.18). Las condiciones de salto a través de una onda de choque, para un gas perfecto (Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.; 1959), son:

$$\frac{\rho_{3s}}{\rho_{2s}} = \frac{(\gamma+1)p_{3s} + (\gamma-1)p_{2s}}{(\gamma-1)p_{3s} + (\gamma+1)p_{2s}} \quad (A4.1)$$

$$(\omega - u_{3s})^2 = \frac{\gamma-1}{2} \frac{p_{3s}}{\rho_{3s}} \left( 1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_{2s}}{p_{3s}} \right) \quad (A4.2)$$

$$(\omega + u_{2s})^2 = \frac{\gamma-1}{2} \frac{p_{2s}}{\rho_{2s}} \left( 1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_{3s}}{p_{2s}} \right) \quad (A4.3)$$

Las ecuaciones (A3.15), (A3.16), (A3.17), (A3.18), (A4.1), (A4.2) y (A4.3) hay que particularizarlas en el instante de la reflexión ( $t=0$ ).

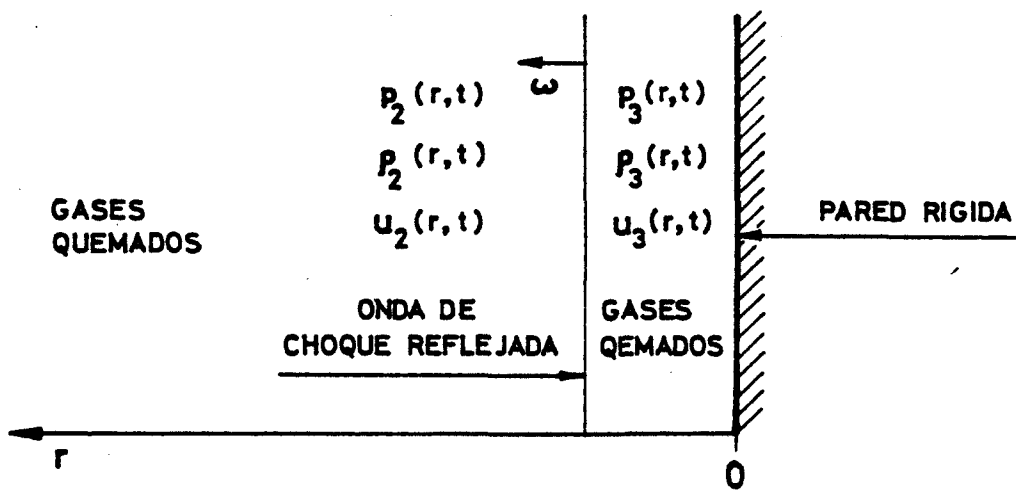
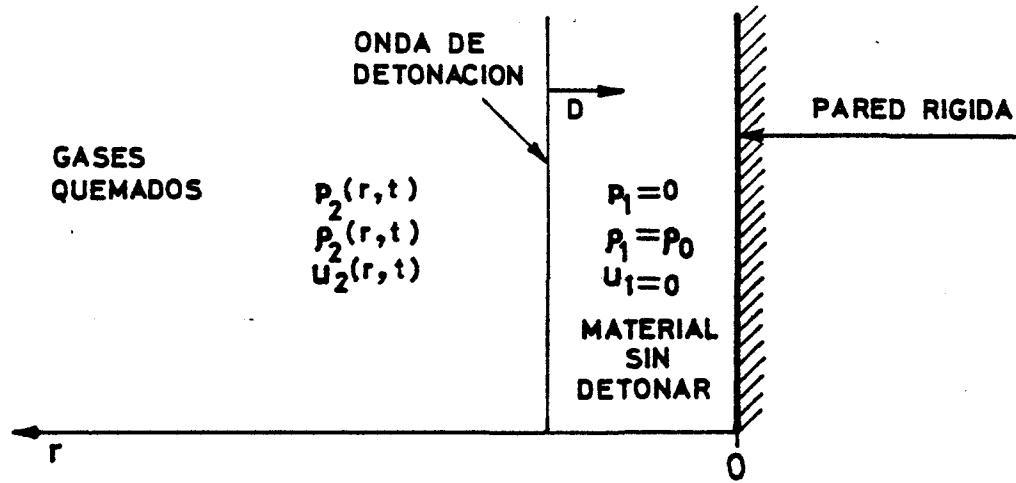


Fig. A04.- Esquema de la onda de detonación antes de la reflexión, y de la onda de choque reflejada.

Utilizamos las ecuaciones (A4.1), (A4.2) y (A4.3) en lugar de (3.7), (3.8) y (3.9), porque en este caso la onda de choque no es intensa, ya que  $p_{3s} \sim p_{2s}$ .

La presión, densidad y velocidad de la onda de choque en el instante de la reflexión son:

$$\frac{p_{30s}}{p_{20s}} = \frac{5\gamma+1+\sqrt{17\gamma^2+2\gamma+1}}{4\gamma} \quad (A4.4)$$

$$\frac{\rho_{30s}}{\rho_{20s}} = \frac{4\gamma^2+\gamma+1+\sqrt{17\gamma^2+2\gamma+1}}{2(2\gamma^2+\gamma-1)} \quad (A4.5)$$

$$\frac{w_0}{D} = - \frac{\gamma-3+\sqrt{17\gamma^2+2\gamma+1}}{4(\gamma+1)} \quad (A4.6)$$

##### 5.- CAMPO FLUIDO DETRAS DE LA ONDA DE CHOQUE REFLEJADA PARA VALORES PEQUEÑOS DE $t/t_0$ .

La onda de choque reflejada se encuentra con los gases producto de la detonación, cuyo movimiento está descrito por las ecuaciones (A3.20), (A3.21) y (A3.22). Dado que la onda de choque se encuentra con un fluido en movimiento, en estas condiciones no puede considerarse homentrópico el movimiento detrás de ella. Las partículas fluidas conservan su entropía después de atravesar la onda de choque, pero con un valor diferente para cada una.

Las ecuaciones que describen el movimiento detrás de la onda de choque van a ser las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.5) con  $j=0$  y  $\gamma=\text{constante}$ . Las condiciones en la onda de choque van a ser (A4.1), (A4.2) y (A4.3) y

en la pared rígida en el instante inicial, las condiciones (A4.4), (A4.5) y (A4.6).

Haciendo los cambios de variable:

$$\bar{p} = \frac{p_3}{p_{30s}} ; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_3}{\rho_{30s}} ; \quad \bar{u} = \frac{u}{D} ; \quad x = \frac{r}{R_0} ; \quad \tau = \frac{t}{t_0}$$

$$\text{y llamando: } \beta = \frac{p_{30s}}{\rho_{30s} D^2} = \frac{(2\gamma^2 + \gamma + 1)(5\gamma + 1 + \sqrt{17\gamma^2 + 2\gamma + 1})}{2\gamma^2(\gamma + 1)^2(4\gamma + \gamma + 1 + \sqrt{17\gamma^2 + 2\gamma + 1})}$$

las ecuaciones se reducen a:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A5.1})$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\beta}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A5.2})$$

$$\left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) - \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A5.3})$$

Las condiciones de contorno en la pared rígida se reducen a:

$$\bar{u} = 0 \quad \text{en} \quad x=0 \quad (\text{A5.4})$$

$$\bar{p} = 1 \quad \text{en} \quad x=0 \text{ y } \tau=0 \quad (\text{A5.5})$$

$$\bar{\rho} = 1 \quad \text{en} \quad x=0 \text{ y } \tau=0 \quad (\text{A5.6})$$

Para  $\tau \ll 1$ , las ecuaciones (A5.1), (A5.2) y (A5.3) admiten soluciones de

la forma:

$$\bar{u} = 0 + \tau v(x/\tau) \quad (A5.7)$$

$$\bar{p} = 1 + \tau F(x/\tau) \quad (A5.8)$$

$$\bar{\rho} = 1 + \tau H(x/\tau) \quad (A5.9)$$

Estas soluciones ya cumplen las condiciones (A5.4), (A5.5) y (A5.6).

El sistema de ecuaciones (A5.1), (A5.2) y (A5.3) se reduce a:

$$H - \left(\frac{x}{\tau}\right) \frac{dH}{d(x/\tau)} + \frac{dv}{d(x/\tau)} = 0 \quad (A5.10)$$

$$v - \left(\frac{x}{\tau}\right) \frac{dv}{d(x/\tau)} + \beta \frac{dF}{d(x/\tau)} = 0 \quad (A5.11)$$

$$F - \left(\frac{x}{\tau}\right) \frac{dF}{d(x/\tau)} - \gamma \left[ H - \left(\frac{x}{\tau}\right) \frac{dH}{d(x/\tau)} \right] = 0 \quad (A5.12)$$

La solución de las ecuaciones (A5.10), (A5.11) y (A5.12) nos da:

$$u_3 = a \frac{r}{t_0} \quad (A5.13)$$

$$p_3 = p_{30s} \left( 1 - a\gamma \frac{t}{t_0} \right) \quad (A5.14)$$

$$\rho_3 = \rho_{30s} \left[ 1 - \frac{t}{t_0} \left( a - b \frac{r}{Dt} \right) \right] \quad (A5.15)$$

siendo la velocidad de propagación de la onda de choque:

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{t_0}} \right) \quad (A5.16)$$

Las constantes  $a$ ,  $b$  y  $e$  hay que determinarlas con las condiciones en la onda de choque (A4.1), (A4.2) y (A4.3), teniendo en cuenta que las magnitudes con subíndice  $s$  están particularizadas en la onda de choque. Es decir, hay que poner  $r = R_s(t)$ . De la ecuación (A5.16) se obtiene:

$$R_s(t) = \omega_0 t \left( 1 + \frac{e}{2} \frac{t}{t_0} \right) \quad (A5.17)$$

$$\text{Siendo } \omega = \frac{dR_s}{dt}.$$

Al introducir las ecuaciones (A3.20), (A3.21), (A3.22), (A5.13), (A5.14), (A5.15) y (A5.16), particularizadas en la onda de choque (ecuación (A5.17)), en las ecuaciones (A4.1), (A4.2) y (A4.3) se obtiene el siguiente sistema algebraico de ecuaciones que nos determina las constantes  $a$ ,  $b$  y  $e$ .

$$\left[ 1 - \frac{4\gamma^2 \pi}{(\gamma^2 - 1)(\pi^2 + 1) + 2(\gamma^2 + 1)\pi} \right] a + \frac{\omega_0}{D} b = \left[ \frac{2}{\gamma} - \frac{8\gamma\pi}{(\gamma^2 - 1)(\pi^2 + 1) + 2(\gamma^2 + 1)\pi} \right] \left( 1 - \frac{\omega_0}{D} \right)$$

$$\left[ 3 - \gamma + \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \pi} \right] a + \frac{\omega_0}{D} b - 2e = \frac{2(1 - \frac{\omega_0}{D})}{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \pi}$$

$$\left[ \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \pi}{1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \pi} \right] \gamma a - \left[ \frac{(\gamma + 1) \frac{\omega_0}{D}}{1 - (\gamma + 1) \frac{\omega_0}{D}} \right] 2e = \left[ \frac{4}{1 - (\gamma + 1) \frac{\omega_0}{D}} - \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma} + \frac{2}{1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{1}{\pi}} \right] \left( 1 - \frac{\omega_0}{D} \right)$$

Para el caso de  $\gamma = 3$ , este sistema de ecuaciones nos da:

$$p_3 = p_{30s} \left(1 - 2.994 \frac{t}{t_0}\right) \quad (A5.18)$$

$$\rho_3 = \rho_{30s} \left(1 - 0.037 \frac{r}{R_0} - 0.998 \frac{t}{t_0}\right) \quad (A5.19)$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - 0.119 \frac{t}{t_0}\right) \quad (A5.20)$$

$$u_3 = -D \left(0.998 \frac{r}{R_0}\right) \quad (A5.21)$$

La solución de este mismo problema, obtenida por (Stanyukovich, K.P.; 1960) sería válida para todo instante si fuese homentrópico el movimiento detrás de la onda de choque. Esto no es cierto salvo de un modo aproximado; los efectos de la no-homentropía se detectan incluso para tiempos pequeños a partir del instante de la reflexión. La solución obtenida por Stanyukovich, desarrollada para  $(t/t_0) \ll 1$ , coincide sin embargo con nuestra solución de un modo aproximado. Por ejemplo, para  $\gamma = 3$  obtenemos  $a = 0.998$ ,  $b = 0.037$  y  $e = -0.119$  frente a  $a=1$ ,  $b=0$  y  $e = -0.167$ , que se obtienen a partir de la solución de Stanyukovich.

## 6.- CONCLUSIONES.

Cuando se tiene una esfera (cilindro) de material condensado que se quiere comprimir, rodeándolo de una cascara de material detonante; el problema de determinación de la presión en la superficie de separación material detonante-material inerte, es análoga a la expuesta en este capítulo.

Hay dos diferencias a tener en cuenta. La primera es que la onda de detonación se mueve a la velocidad de CHAPMAN-JOUGUET solo en el instante inicial, ya que se acelera posteriormente por efecto de la convergencia geométrica. La segunda se debe a que la superficie de separación de ambos materiales no permanece rígida. Sin embargo la velocidad de la superficie de separación es pequeña, comparada con la velocidad de la onda de detonación, cuando la relación de densidades material inerte a material detonante es grande.

Cuando el espesor de la capa detonante es pequeño comparado con el radio total de la esfera (cilindro), la evolución del campo fluido detrás de la onda de detonación en toda la capa de material detonante es, en primera aproximación, la solución del caso plano que hemos resuelto. En estas condiciones los resultados obtenidos nos proporcionan el orden de magnitud de los datos necesarios para otros problemas. En particular la evolución de la presión en la superficie rígida, ecuaciones (A3.16), (A4.4) y (A5.14), que sería dato para el desarrollo del capítulo B.

Dentro de la aproximación plana, no afecta para nada el que la superficie exterior del detonante esté soportada por una pared rígida. Su efecto se notaría en tiempos posteriores a la reflexión de la onda de detonación.

Un estudio más completo, incluyendo los efectos de la convergencia geométrica, el movimiento de la superficie de separación material detonante-material inerte y el efecto de un reflector en la superficie exterior del detonante, está ya prácticamente acabado y los resultados obtenidos se presentarán posteriormente.



## CAPITULO B

### CAMPO FLUIDO DETRAS DE UNA ONDA DE CHOQUE PLANA, CILINDRICA O ESFERICA. SOLUCION PARA TIEMPOS PEQUEÑOS A PARTIR DEL INSTANTE INICIAL.

#### 1.- INTRODUCCION.

En este capítulo estudiaremos las primeras etapas del proceso implsivo de una onda de choque, originada en un material mediante la aplicación brusca, en el instante  $t=0$ , de una presión uniforme en toda la superficie exterior del material, que posteriormente evoluciona con el tiempo siguiendo una ley determinada.

En este estudio utilizaremos las ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.6) con las condiciones de contorno (4.8), (4.9) y (4.10). En la ecuación (4.10) es  $q=0$ , por tratarse de un material inerte. La condición adicional que necesitamos para la completa determinación del problema, es precisamente la ley de presiones que se aplica en la superficie exterior.

Para tiempos pequeños medidos a partir del instante inicial, la posición de la onda de choque difiere muy poco de su posición inicial, es decir,  $(R_0 - R_s)/R_0$  es un número mucho menor que la unidad. Por esta razón, buscamos la solución en forma de un desarrollo en serie de potencias de la variable  $x_s$  ( $x_s = (R_s - R_0)/R_0$ ), válido en principio solamente para  $|x_s| \ll 1$ .

La solución se obtiene, en general, hasta términos del orden de  $x_s$ ; dejando indicada la forma de obtener los parámetros que determinan los términos de orden  $x_s^2$ .

La solución se obtiene para formas arbitrarias de la ecuación de estado  $e_s = e_s(p_s, \rho_s)$ , que determina la energía interna del fluido detrás de la onda de choque en función de la presión y densidad del fluido detrás de

la onda de choque. Se hace aplicación al caso de que el fluido se comporte como un gas perfecto, incluyendo en este caso hasta términos del orden de  $x_s^2$  en la solución. También se hace aplicación al caso en que las ecuaciones de estado son tales que la onda de choque se mueva con una velocidad que va ría linealmente con la velocidad del fluido inmediatamente detrás de la onda de choque,  $D=E+Gu_s$ , relación experimental que se da con buena aproximación en el caso de ondas de choque que se propagan en sólidos a presiones del orden de  $10^6$  atmósferas.

#### LISTA DE SIMBOLOS.

Los simbolos que se dan a continuación complementan a la lista general de simbolos y son específicos de este capítulo.

A,B,	Coefficientes que determinan la velocidad de la onda de choque. Ecuación (B3.1).
$D_0$ ,	Velocidad de propagación de la onda de choque en el instante <u>ini</u> cial.
E,G,	Constantes de la ecuación (B8.2.1)
$G_p$ ,	Definido como $G_p = (\partial \gamma / \partial p)_i \rho_0 D_0^2$ .
$G_\rho$ ,	Definido como $G_\rho = (\partial \gamma / \partial \rho_s)_i \rho_0$ .
N,Q,	Constantes en la ecuación (B3.7).
$p_s$ ,	Presión inmediatamente detrás de la onda de choque.
$p_{sL}$ ,	Presión en la superficie exterior.
$p_{s0}$ ,	Presión en la superficie exterior en el instante inicial.
$R_s$ ,	Radio de la onda de choque.
$R_{sL}$ ,	Radio de la superficie exterior.

- $X, Y, W,$       Constantes que determinan  $R_{sL}$ . Ecuación (B3.4).
- $\alpha,$               Coeficiente que determina  $\psi_1(\xi)$ . Ecuación (B5.11).
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$       Coeficientes que determinan  $\psi_2(\xi)$ . Ecuación (B6.10).
- $\beta,$               Coeficiente que determina  $f_1(\xi)$ . Ecuación (B5.12).
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3,$       Coeficientes que determinan  $f_2(\xi)$ . Ecuación (B6.9).
- $\lambda,$               Coeficiente que determina  $\phi_1(\xi)$ . Ecuación (B5.10).
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,$       Coeficientes que determinan  $\phi_2(\xi)$ . Ecuación (B6.8).

Subíndices.

- 0,              Términos de orden unidad (Salvo  $\rho_0$ )
- 1,              Términos de orden  $x_s$  (Salvo  $\alpha_1, \beta_1, \lambda_1$ ).
- 2,              Términos de orden  $x_s^2$  (Salvo  $\alpha_2, \beta_2, \lambda_2$ ).
- s,              Onda de choque. (Salvo  $p_{s0}$ )
- sL,              Superficie exterior.

3.- DESARROLLOS PARA TIEMPOS PEQUEÑOS.

Como hemos dicho anteriormente, un desarrollo para tiempos pequeños es equivalente a un desarrollo para  $|x_s| \ll 1$ .

La velocidad de propagación de la onda de choque, desarrollada en potencias de  $x_s$ , va a ser de la forma:

$$D = D_0(1 + Ax_s + Bx_s^2 + \dots) \quad (B3.1)$$

donde  $D_0$ , A y B son constantes a determinar como parte de la solución.

Dado que  $\frac{dR_s}{dt} = -D$ , el signo menos es debido a que la onda de choque avanza hacia radios decrecientes, tendremos:

$$t = - \frac{R_0}{D_0} x_s \left(1 - \frac{A}{2} x_s + \dots\right) \quad (B3.2)$$

Del mismo modo tendremos:

$$\theta_s = \frac{x_s \ddot{x}_s}{\dot{x}_s^2} = x_s \{A + (2B - A^2)x_s + \dots\} \quad (B3.3)$$

La posición de la superficie exterior,  $R_{sL}(t)$ , desarrollada en potencias de  $x_s$ , será de la forma:

$$R_{sL} = R_0(1 + Wx_s + Xx_s^2 + Yx_s^3 + \dots) \quad (B3.4)$$

donde W, X e Y son también constantes a determinar con la solución.

La velocidad de la superficie exterior  $u_{sL} = -dR_{sL}/dt$ , con ayuda de la ecuación (B3.4) se puede escribir como:

$$\frac{d(x_s \xi_{sL})}{dx_s} = \phi_{sL} \{ \xi_{sL}(x_s) \} \quad (B3.5)$$

siendo:

$$\xi_{sL} = W + Xx_s + Yx_s^2 + \dots \quad (B3.6)$$

Analizaremos los casos en que la presión aplicada en la superficie exterior es una función cualquiera del tiempo con las condiciones:

$$p_{sL}(t) = 0, \text{ para } t < 0; \quad p_{sL}(t) = g(t), \text{ para } t > 0 \text{ y } g(0) = p_{s0} \neq 0$$

para tiempos pequeños, la presión en la superficie exterior la podremos poner como:

$$p_{sL}(t) = p_{s0}(1 + Nt + Ot^2 + \dots) \quad (B3.7)$$

que escrita en variables  $x_s$  y  $f$  queda:

$$f_{sL}(x_s) = \frac{p_{s0}}{\rho_0 D_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{NR_0}{D_0} + 2A \right) x_s + \left( \frac{5}{2} A \frac{NR_0}{D_0} + 3A^2 - \frac{QR_0^2}{D_0^2} - 2B \right) x_s^2 + \dots \right] \quad (B3.8)$$

Las variables dependientes las escribiremos como:

$$\phi(x_s, \xi) = \phi_0(\xi) + x_s \phi_1(\xi) + x_s^2 \phi_2(\xi) + \dots$$

$$\psi(x_s, \xi) = \psi_0(\xi) + x_s \psi_1(\xi) + x_s^2 \psi_2(\xi) + \dots \quad (B3.9)$$

$$f(x_s, \xi) = f_0(\xi) + x_s f_1(\xi) + x_s^2 f_2(\xi) + \dots$$

Por último, si la solución es válida para tiempos pequeños, la relación de calores específicos,  $\gamma$ , la podremos escribir como:

$$\gamma(p, \rho) = \gamma(p_i, \rho_i) + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial p}\right)_i (p - p_i) + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho}\right)_i (\rho - \rho_i) + \dots \quad (B3.10)$$

que escrita en función de las variables  $f$ ,  $\psi$  y  $x_s$  queda:

$$\gamma = \gamma_0 + \{G_p(2Af_0 + f_1) + G_\rho \psi_1\} x_s + \dots \quad (B3.11)$$

siendo  $\gamma_0 = \gamma(p_i, \rho_i)$ ;  $G_p = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial p}\right)_i \rho_0 D_0^2$ ;  $G_\rho = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho}\right)_i \rho_0$

$p_i$  y  $\rho_i$  son la presión y densidad del fluido en el instante inicial.  
( $p_i = p_{s0}$ ).

Introduciendo los desarrollos (B3.3), (B3.9) y (B3.11) en las ecuaciones diferenciales (4.4), (4.5) y (4.6) y en las condiciones en la onda (4.8), (4.9) y (4.10), esta última con  $q=0$ , y junto con la ecuación (B3.8), se obtiene una serie de tres ecuaciones diferenciales ordinarias con sus condiciones de contorno para cada uno de los órdenes de magnitud, que escribiremos y resolveremos a continuación.

No haremos uso de la condición (4.10) hasta el final, cuando especifiquemos el tipo de ecuación de estado  $e_s = e_s(p_s, \rho_s)$ .

#### .- PRIMER TERMINO DEL DESARROLLO.

Los términos independientes de  $x_s$  proporcionan las ecuaciones:

$$(\phi_0 - \xi) \frac{d\psi_0}{d\xi} + \psi_0 \frac{d\phi_0}{d\xi} = 0 \quad (\text{B4.1})$$

$$(\phi_0 - \xi) \frac{d\phi_0}{d\xi} + \frac{1}{\psi_0} \frac{df_0}{d\xi} = 0 \quad (\text{B4.2})$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{f_0}{\gamma_0 \psi_0} \right) = 0 \quad (\text{B4.3})$$

Con las condiciones de contorno:

$$\psi_0(1) = \frac{1}{1 - \phi_0(1)} \quad (\text{B4.4})$$

$$f_0(1) = \phi_0(1) \quad (\text{B4.5})$$

$$f_0 \{ \xi_{sL}(x_s) \} = \frac{p_{s0}}{\rho_0 D_0^2} \quad (\text{B4.6})$$

y  $\phi_0(1)$  lo determinaremos cuando conozcamos  $e_s = e_s(p_s, \rho_s)$ .

La solución del sistema de ecuaciones (B4.1), (B4.2) y (B4.3) depende de que el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \phi_0 - \xi & \psi_0 \\ \gamma_0 \frac{f_0}{\psi_0^2} & \phi_0 - \xi \end{vmatrix}$$

sea igual o distinto de cero. Si  $\Delta=0$  obtenemos una solución que cumpliendo

las condiciones en la onda de choque (B4.4) y (B4.5) no cumple la condición (B4.6) o viceversa. La única posibilidad es que  $\Delta \neq 0$ . Si  $\Delta \neq 0$ , la solución queda:

$$\phi_0(\xi) = \phi_0(1) = \text{constante} = \phi_0 \quad (\text{B4.7})$$

$$f_0(\xi) = f_0(1) = \text{constante} = \phi_0 \quad (\text{B4.8})$$

$$\psi_0(\xi) = \psi_0(1) = \text{constante} = 1/(1-\phi_0) \quad (\text{B4.9})$$

Al obligar a que se cumpla la ecuación (B4.6) se obtiene:

$$D_0 = \sqrt{\frac{P_{s0}}{\rho_0 \phi_0}} \quad (\text{B4.10})$$

La ecuación (B3.5), con la (B3.6) nos da la posición de la superficie exterior, que para este orden de magnitud queda:

$$\xi_{sL0} = W = \phi_0 \quad (\text{B4.11})$$

o bien:

$$R_{sL0} = R_0(1 + x_s \phi_0) \quad (\text{B4.12})$$



5.- TERMINOS DE ORDEN  $x_s$ .

Análogamente al caso anterior, identificando los coeficientes de los términos proporcionales a  $x_s$ , obtenemos las ecuaciones:

$$(\phi_0 - \xi) \frac{d\psi_1}{d\xi} + \psi_0 \frac{d\phi_1}{d\xi} = -j \phi_0 \psi_0 - \psi_1 \quad (B5.1)$$

$$(\phi_0 - \xi) \frac{d\phi_1}{d\xi} + \frac{1}{\psi_0} \frac{df_1}{d\xi} = -\phi_1 - A\phi_0 \quad (B5.2)$$

$$(\phi_0 - \xi) \frac{d}{d\xi} \left( \frac{f_1}{f_0} - \gamma_0 \frac{\psi_1}{\psi_0} \right) = - \left( \frac{f_1}{f_0} - \gamma_0 \frac{\psi_1}{\psi_0} \right) - 2A \quad (B5.3)$$

Con las condiciones:

$$\psi_1(1) = \frac{\phi_1(1)}{(1-\phi_0)^2} \quad (B5.4)$$

$$f_1(1) = \phi_1(1) \quad (B5.5)$$

$$f_1 \{ \xi_{sL}(x_s) \} = -\phi_0 \left( \frac{NR_0}{D_0} + 2A \right) \quad (B5.6)$$

Análogamente al caso anterior,  $\phi_1(1)$  se calcula a posteriori de acuerdo con la ecuación de estado  $e_s = e_s(p_s, \rho_s)$  que tengamos.

La ecuación (B5.3) puede integrarse directamente para darnos:

$$\chi(\xi) - \chi(1) = \frac{\chi(1) + 2A}{\phi_0 - 1} (1 - \xi) \quad (B5.7)$$

siendo:

$$\chi(\xi) = \frac{f_1(\xi)}{f_0} - \gamma_0 \frac{\psi_1(\xi)}{\psi_0} \quad (\text{B5.8})$$

$$\chi(1) = \frac{f_1(1)}{f_0} - \gamma_0 \frac{\psi_1(1)}{\psi_0} = \frac{\phi_1(1)}{\phi_0} \left[ \frac{1 - (\gamma_0 + 1)\phi_0}{1 - \phi_0} \right] \quad (\text{B5.9})$$

A la vista de la ecuación (B5.7), la solución del sistema de ecuaciones (B5.1), (B5.2) y (B5.3) va a ser de la forma:

$$\phi_1(\xi) - \phi_1(1) = \lambda(1 - \xi) \quad (\text{B5.10})$$

$$\psi_1(\xi) - \psi_1(1) = \alpha(1 - \xi) \quad (\text{B5.11})$$

$$f_1(\xi) - f_1(1) = \beta(1 - \xi) \quad (\text{B5.12})$$

Introduciendo estas formas de la solución en las ecuaciones diferenciales (B5.1), (B5.2) y (B5.3), los términos a los que multiplica  $\xi$  se anulan idénticamente y los términos independientes, junto con la ecuación (B5.6) transformada como indicamos a continuación, nos proporcionan cuatro ecuaciones algébricas, que nos permiten determinar las cuatro incógnitas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  y  $A$ .

Como  $\xi_{sL}$  en primera aproximación es  $\phi_0$  (B4.11), la ecuación (B5.6) puede escribirse como:

$$f_1(1) + \beta(1 - \phi_0) = -\phi_0 \left( \frac{NR_0}{D_0} + 2A \right) \quad (\text{B5.13})$$

Utilizando también las relaciones (B5.4) y (B5.5) se obtiene:

$$\alpha = - \frac{1}{\gamma_0(1-\phi_0)^2} \cdot \frac{NR_0}{D_0} - \frac{\phi_1(1)}{(1-\phi_0)^3} \quad (B5.14)$$

$$\beta = \frac{2}{3} j\phi_0 - \frac{2+(\gamma_0-2)\phi_0}{3\gamma_0(1-\phi_0)} \cdot \frac{NR_0}{D_0} + \frac{\phi_1(1)}{3(1-\phi_0)} \quad (B5.15)$$

$$\lambda = - \frac{1}{\gamma_0} \frac{NR_0}{D_0} + j\phi_0 \quad (B5.16)$$

$$A = \frac{1-(\gamma_0+1)\phi_0}{3\gamma_0 \phi_0} \frac{NR_0}{D_0} - \frac{1-\phi_0}{3} j - \frac{2\phi_1(1)}{3\phi_0} \quad (B5.17)$$

De las ecuaciones (B3.5) y (B3.6) obtenemos la nueva posición de la superficie exterior:

$$X = \frac{1}{2} \{ \phi_1(1) + \lambda(1 - \phi_0) \} \quad (B5.18)$$

$$\xi_{sL0} + \xi_{sL1} x_s = \phi_0 + \frac{1}{2} \{ \phi_1(1) + \lambda(1 - \phi_0) \} x_s \quad (B5.19)$$

## 6.- TERMINOS DE ORDEN $x_s^2$

Analogamente a los casos anteriores, las ecuaciones son:

$$(\phi_0 - \xi) \frac{d\psi_2}{d\xi} + \psi_0 \frac{d\phi_2}{d\xi} = -j(\phi_0\psi_1 + \phi_1\psi_0 - \xi\phi_0\psi_0) - 2\psi_2 - \frac{d(\phi_1\psi_1)}{d\xi} \quad (B6.1)$$

$$(\phi_0 - \xi) \frac{d\phi_2}{d\xi} + \frac{1}{\psi_0} \frac{d\psi_2}{d\xi} = - \{ A\phi_1 + (2B - A^2)\phi_0 \} - 2\phi_2 - \frac{1}{2} \frac{d\phi_1^2}{d\xi} + \left( \frac{\psi_1}{\psi_0^2} \right) \frac{d\psi_1}{d\xi} \quad (B6.2)$$

$$\begin{aligned} & (\phi_0 - \xi) \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{f_2}{f_0} - \gamma_0 \frac{\psi_2}{\psi_0} - \gamma_0 \frac{\psi_1}{\psi_0} \left( \frac{f_1}{f_0} - \frac{\gamma_0 + 1}{2} \frac{\psi_1}{\psi_0} \right) \right] + \phi_1 \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{f_1}{f_0} - \gamma_0 \frac{\psi_1}{\psi_0} \right] = \\ & = -2 \left[ \frac{f_2}{f_0} - \gamma_0 \frac{\psi_2}{\psi_0} - \gamma_0 \frac{\psi_1}{\psi_0} \left( \frac{f_1}{f_0} - \frac{\gamma_0 + 1}{2} \frac{\psi_1}{\psi_0} \right) \right] - 2 \left[ 2B - A^2 + A \left( \frac{f_1}{f_0} - \gamma_0 \frac{\psi_1}{\psi_0} \right) \right] + \\ & + \left[ G_p (2Af_0 + f_1) + G_p \psi_1 \right] \left[ (\phi_0 - \xi) \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\psi_1}{\psi_0} \right) + \frac{\psi_1}{\psi_0} \right] \quad (B6.3) \end{aligned}$$

Con las condiciones:

$$\psi_2(1) = \frac{1}{1 - \phi_0} \left\{ \left[ \frac{\phi_1(1)}{1 - \phi_0} \right]^2 + \frac{\phi_2(1)}{1 - \phi_0} \right\} \quad (B6.4)$$

$$f_2(1) = \phi_2(1)$$

$$\begin{aligned} f_1 \{ \xi_{sL}(x_s) \} + x_s f_2 \{ \xi_{sL}(x_s) \} &= -\phi_0 \left( \frac{NR_0}{D_0} + 2A \right) - \\ &- \phi_0 \left( \frac{5}{2} A \frac{NR_0}{D_0} + 3A^2 - \frac{QR_0^2}{D_0^2} - 2B \right) x_s \quad (B6.5) \end{aligned}$$

$\phi_2(1)$  lo calcularemos a posteriori cuando se conozca la ecuación de estado  $e_s = e_s(p_s, \rho_s)$ .

La ecuación (B6.3) puede integrarse directamente para darnos:

$$\delta(\xi) - \delta(1) + c_3(1-\phi_0)^2 \ln(1-\phi_0) = c_1(1-\xi) + c_2(1-\xi)^2 + c_3(\xi-\phi_0)^2 \ln(\xi-\phi_0) \quad (B6.6)$$

siendo:

$$\delta(\xi) = \frac{f_2(\xi)}{f_0} - \gamma_0 \frac{\psi_2(\xi)}{\psi_0} - \gamma_0 \frac{\psi_1(\xi)}{\psi_0} \left[ \frac{f_1(\xi)}{f_0} - \frac{\gamma_0+1}{2} \frac{\psi_1(\xi)}{\psi_0} \right] \quad (B6.7)$$

A la vista de la solución (B6.6), la solución va a ser de la forma:

$$\phi_2(\xi) - \phi_2(1) + \lambda_3(1-\phi_0)^2 \ln(1-\phi_0) = \lambda_1(1-\xi) + \lambda_2(1-\xi)^2 + \lambda_3(\xi-\phi_0)^2 \ln(\xi-\phi_0) \quad (B6.8)$$

$$f_2(\xi) - f_2(1) + \beta_3(1-\phi_0)^2 \ln(1-\phi_0) = \beta_1(1-\xi) + \beta_2(1-\xi)^2 + \beta_3(\xi-\phi_0)^2 \ln(\xi-\phi_0) \quad (B6.9)$$

$$\psi_2(\xi) - \psi_2(1) + \alpha_3(1-\phi_0)^2 \ln(1-\phi_0) = \alpha_1(1-\xi) + \alpha_2(1-\xi)^2 + \alpha_3(\xi-\phi_0)^2 \ln(\xi-\phi_0) \quad (B6.10)$$

La condición (B6.5) se reduce a:

$$\begin{aligned} f_2(1) - \beta_3(1-\phi_0)^2 \ln(1-\phi_0) + \beta_1(1-\phi_0) + \beta_2(1-\phi_0)^2 = \\ = - \left[ \frac{5}{2} A \frac{NR_0}{D_0} + 3A^2 - \frac{QR_0^2}{D_0^2} - 2B \right] \end{aligned} \quad (B6.11)$$

Introduciendo las soluciones (B6.8), (B6.9) y (B6.10) en las ecuaciones (B6.1), (B6.2) y (B6.3) e identificando términos se obtienen nueve ecuaciones algebraicas, que junto con la (B6.11), obtenemos las diez ecuaciones algebraicas que nos permiten determinar las diez incógnitas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y B.

De las ecuaciones (B3.5) y (B3.6) obtenemos la nueva corrección a la posición de la superficie exterior, quedando:

$$Y = \frac{\lambda}{6} \{ \phi_1(1) + \lambda(1-\phi_0) \} + \frac{1}{3} \{ \phi_2(1) - \lambda_3(1-\phi_0)^2 \ln(1-\phi_0) + \lambda_1(1-\phi_0) + \lambda_2(1-\phi_0)^2 \}$$

(B6.12)

#### .- SOLUCION

La solución de las ecuaciones, reteniendo hasta términos del orden de  $x_s$ , queda:

$$t = - \frac{R_0}{D_0} x_s \left( 1 - \frac{A}{2} x_s \right) \quad (B7.1)$$

$$r = R_0(1 + x_s \xi) \quad (B7.2)$$

$$D = D_0(1 + A x_s); \text{ con } D_0 = (v_{s0}/v_0 \phi_0)^{1/2} \quad (B7.3)$$

$$y \quad A = \frac{1 - (\gamma_0 + 1)\phi_0}{3\gamma_0 \phi_0} \cdot \frac{NR_0}{D_0} - \frac{j(1-\phi_0)}{3} - \frac{2\phi_1(1)}{3\phi_0}$$

$$R_{sL} = R_0 \left\{ 1 + \phi_0 x_s + \frac{1}{2} \left[ \phi_1(1) - \left( \frac{1}{\gamma_0} \frac{NR_0}{D_0} - \phi_0 \right) (1 - \phi_0) \right] x_s^2 \right\} \quad (B7.4)$$

$$R_s = R_0(1 + x_s) \quad (B7.5)$$

$$\frac{p}{\rho_0 D_0^2} = \phi_0 + \{2A\phi_0 + \phi_1(1) + \beta(1-\xi)\} x_s \quad (B7.6)$$

Con  $D_0$  y  $A$  los indicados anteriormente y

$$\beta = \frac{2}{3} \phi_0 - \frac{2 + (\gamma_0 - 2)\phi_0}{3\gamma_0(1-\phi_0)} \cdot \frac{NR_0}{D_0} + \frac{\phi_1(1)}{3(1-\phi_0)}$$

$$\frac{u}{D_0} = \phi_0 + \{A\phi_0 + \phi_1(1) - \left( \frac{1}{\gamma_0} \frac{NR_0}{D_0} - \phi_0 \right) (1-\xi)\} x_s \quad (B7.7)$$

con  $D_0$  y  $A$  los indicados anteriormente.

$$\frac{p}{\rho_0} = \frac{1}{1-\phi_0} + \left[ \frac{\phi_1(1)}{(1-\phi_0)^2} + \alpha(1-\xi) \right] x_s \quad (B7.8)$$

$$\text{con } \alpha = - \frac{1}{(1-\phi_0)^2} \left[ \frac{1}{\gamma_0} \frac{NR_0}{D_0} + \frac{\phi_1(1)}{1-\phi_0} \right]$$

8.- CALCULO DE  $\phi_0$ ,  $\phi_1(1)$  y  $\phi_2(1)$  CUANDO SE CONOCE LA ECUACION DE ESTADO  $e_s = e_s(p_s, \rho_s)$ .

Como veremos a continuación, no es necesario conocer la ecuación de estado por completo, sino que solamente se necesitan algunos datos de ella.

Dado que la solución obtenida es válida para tiempos pequeños a partir del instante inicial, la presión y densidad van a variar poco respecto al valor que tienen en el instante inicial. Esto nos permitirá escribir:

$$e_s(p_s, \rho_s) = e_s(p_{s0}, \rho_{s0}) + \left(\frac{\partial e_s}{\partial p_s}\right)_0 (p_s - p_{s0}) + \left(\frac{\partial e_s}{\partial \rho_s}\right)_0 (\rho_s - \rho_{s0}) + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial^2 e_s}{\partial p_s^2}\right)_0 (p_s - p_{s0})^2 + \left(\frac{\partial^2 e_s}{\partial \rho_s^2}\right)_0 (\rho_s - \rho_{s0})^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 e_s}{\partial p_s \partial \rho_s}\right)_0 (p_s - p_{s0})(\rho_s - \rho_{s0}) \right] \quad (B8.1)$$

Con los desarrollos (B3.9) y (B3.1) podemos poner:

$$p_s - p_{s0} = \rho_0 D_0^2 \left\{ \left[ 2A\phi_0 + \phi_1(1) \right] x_s + \left[ (A^2 + 2B)\phi_0 + 2A\phi_1(1) + \phi_2(1) \right] x_s^2 \right\} \quad (B8.2)$$

$$\rho_s - \rho_{s0} = -\rho_0 \left\{ \frac{\phi_1(1)}{(1-\phi_0)^2} x_s + \frac{1}{1-\phi_0} \left[ \frac{\phi_1(1)^2}{1-\phi_0} + \frac{\phi_2(1)}{1-\phi_0} \right] x_s^2 \right\} \quad (B8.3)$$

Introduciendo (B8.2) y (B8.3) en (B8.1) y esta última en (4.10) con  $q=0$  e identificando términos del mismo orden, se obtiene

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{2e_0}{D_0^2}} \quad (B8.4)$$

$$\phi_1(1) = \frac{e_1 - 2Ae_0}{\phi_0 D_0^2} \quad (B8.5)$$

$$\phi_2(1) = \frac{(3A^2 - 2B)e_0 - 2Ae_1 + e_2}{\frac{1}{2} \phi_0 D_0^2} - \frac{\phi_1^2(1)}{\phi_0} \quad (B8.6)$$

siendo:

$$e_0 = e_s(p_{s0}, \rho_{s0}) \quad (B8.7)$$



$$e_1 = \left( \frac{\partial e_s}{\partial p_s} \right)_0 \rho_0 D_0^2 \{ 2A\phi_0 + \phi_1(1) \} + \left( \frac{\partial e_s}{\partial p_s} \right)_0 \rho_0 \frac{\phi_1(1)}{(1-\phi_0)^2} \quad (B8.8)$$

$$\begin{aligned} e_2 = & \left( \frac{\partial e_s}{\partial p_s} \right)_0 \rho_0 D_0^2 \{ (A^2 + 2B)\phi_0 + 2A\phi_1(1) + \phi_2(1) \} + \left( \frac{\partial e_s}{\partial p_s} \right)_0 \frac{\rho_0}{1-\phi_0} \left[ \frac{\phi_1(1)}{(1-\phi_0)}^2 + \frac{\phi_2(1)}{1-\phi_0} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 e_s}{\partial p_s^2} \right)_0 \rho_0^2 D_0^4 \{ 2A\phi_0 + \phi_1(1) \}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 e_s}{\partial p_s^2} \right)_0 \rho_0^2 \left[ \frac{\phi_1(1)}{(1-\phi_0)^2} \right]^2 + \\ & + \left( \frac{\partial^2 e_s}{\partial p_s \partial p_s} \right)_0 \rho_0^2 D_0^2 \{ 2A\phi_0 + \phi_1(1) \} \frac{\phi_1(1)}{(1-\phi_0)^2} \end{aligned} \quad (B8.9)$$

### 8.1.- CASO DE GAS PERFECTO.

En este caso  $e_s = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_s}{\rho_s}$  con  $\gamma$  constante. Con lo que se obtiene:

$$\phi_0 = \frac{2}{\gamma+1} ; \quad \phi_1(1) = 0; \quad \phi_2(1) = 0 \quad (B8.1.1)$$

Para los términos de orden  $x_s$ , las relaciones (B5.14), (B5.15), (B5.16) y (B5.17) se reducen a:

$$\alpha = - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^2 \frac{NR_0}{D_0} \quad (B8.1.2)$$

$$\beta = \frac{2}{3} \left[ \frac{2\gamma}{\gamma+1} - \frac{2\gamma-1}{\gamma(\gamma-1)} \cdot \frac{NR_0}{D_0} \right] \quad (B8.1.3)$$

$$\lambda = \frac{2j}{\gamma+1} - \frac{1}{\gamma} \frac{NR_0}{D_0} \quad (B8.1.4)$$

$$A = - \frac{\gamma+1}{6} \left[ \frac{1}{\gamma} \frac{NR_0}{D_0} + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} j \right] \quad (B8.1.5)$$

Para los términos de orden  $x_s^2$ , al ser  $\gamma$  constante, los coeficientes  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$  y  $\lambda_3$  son nulos, ya que son los coeficientes que dependen de la variación de  $\gamma$ . El resto de los coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $B$  se obtienen del sistema de ecuaciones algébricas de la tabla B01. En este sistema de ecuaciones se ha incluido una nueva ecuación con una nueva incognita, solamente por comodidad de resolución del sistema. Esta nueva ecuación es:

$$2B + (1-\phi_0)F = A^2 \quad (B8.1.6)$$

En las Figs. B01 y B02 se ha representado el coeficiente  $A$  a la velocidad de propagación de la onda de choque  $D=D_0(1+Ax_s)$  en función del coeficiente  $NR_0/D_0$  de la presión impuesta en la superficie exterior,  $p_{sL}=p_{s0}(1+Nt)$ , y de la relación de calores específicos  $\gamma=c_p/c_v$ , en los casos cilíndrico y esférico respectivamente (ecuación (B8.1.5)). Dado que  $x_s < 0$ , la onda de choque se acelera cuando  $A < 0$  y se decelera en el caso contrario.

En la Fig. B03 se han representado, en función del tiempo, la presión en la superficie exterior  $p_{sL}$  y en la onda de choque  $p_s$ ; la densidad en la superficie exterior  $\rho_{sL}$  y en la onda de choque  $\rho_s$ ; el radio de la superficie exterior  $R_{sL}$  y el de la onda de choque  $R_s$ ; y la velocidad de propagación de la onda de choque  $D$ . En este caso se han retenido términos del orden de  $x_s^2$ . Los valores representados en la Fig. B03 corresponden al caso particular de  $j=2$  (esférico);  $\gamma=3$ ;  $NR_0/D_0=-1$ ;  $QR_0^2/D_0^2=1$ . Los valores correspondientes de  $A, B, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2, \lambda, \lambda_1$  y  $\lambda_2$  para el caso citado, se indican en la Tabla B02.

		$\psi_2 = \alpha_1(1-\xi) + \alpha_2(1-\xi)^2$		$f_2 = \beta_1(1-\xi) + \beta_2(1-\xi)^2$		$\phi_2 = \lambda_1(1-\xi) + \lambda_2(1-\xi)^2$		
B	F	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	
0	$-\frac{\phi_0}{\phi_0-1}$	0	$-\gamma \frac{\phi_0}{\psi_0}$	0	1	0	0	$\frac{\phi_0 \psi_0}{\phi_0-1} \Lambda(\dots)$
0	-2	$-\gamma \frac{\phi_0}{\psi_0}$	0	1	0	0	0	
0	$-\phi_0$	0	0	$\frac{1}{\psi_0(\phi_0-1)}$	0	1	0	
0	0	0	0	0	$2/\psi_0$	-1	$2(\phi_0-1)$	$\lambda (A-\lambda)$
0	0	$\phi_0-1$	0	0	0	$\psi_0$	0	$-j \phi_0$
0	0	-1	$2(\phi_0-1)$	0	0	0	$2\psi_0$	$j\phi_0\alpha +$
0	$2(\phi_0-1)$	0	0	$\frac{2}{\phi_0\psi_0}$	$\frac{2}{\phi_0\psi_0^2}$	0	0	$\frac{\beta\lambda}{\phi_0\psi_0} +$
2	$-(\phi_0-1)$	0	0	0	0	0	0	
$\phi_0 = \frac{2}{\gamma+1} ; \quad f_0 = \frac{2}{\gamma+1} ; \quad \psi_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$								

Tabla B01.- Sistema de ecuaciones que determinan los términos de orden  $x_s^2$ . Caso de gas

$$\gamma = 3$$

$$j = 2 \text{ (ESFERICO)}$$

$$p_{sL} = p_{s0}(1+Nt+Ot^2); \quad \frac{NR_0}{D_0} = -1;$$

D/D <sub>0</sub>		ρ/ρ <sub>0</sub>			P/ρ <sub>0</sub> D <sub>0</sub> <sup>2</sup>			
A	B	α	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>	β	β <sub>1</sub>	β <sub>2</sub>	λ
- 0.55556	0.28664	- 1.33333	0.64636	5.60016	0.11111	- 0.57378	1.14914	0.66666

Tabla B02.- Valores de las constantes que determinan la solución en términos de orden  $x_s$  y  $x$  perfecto.

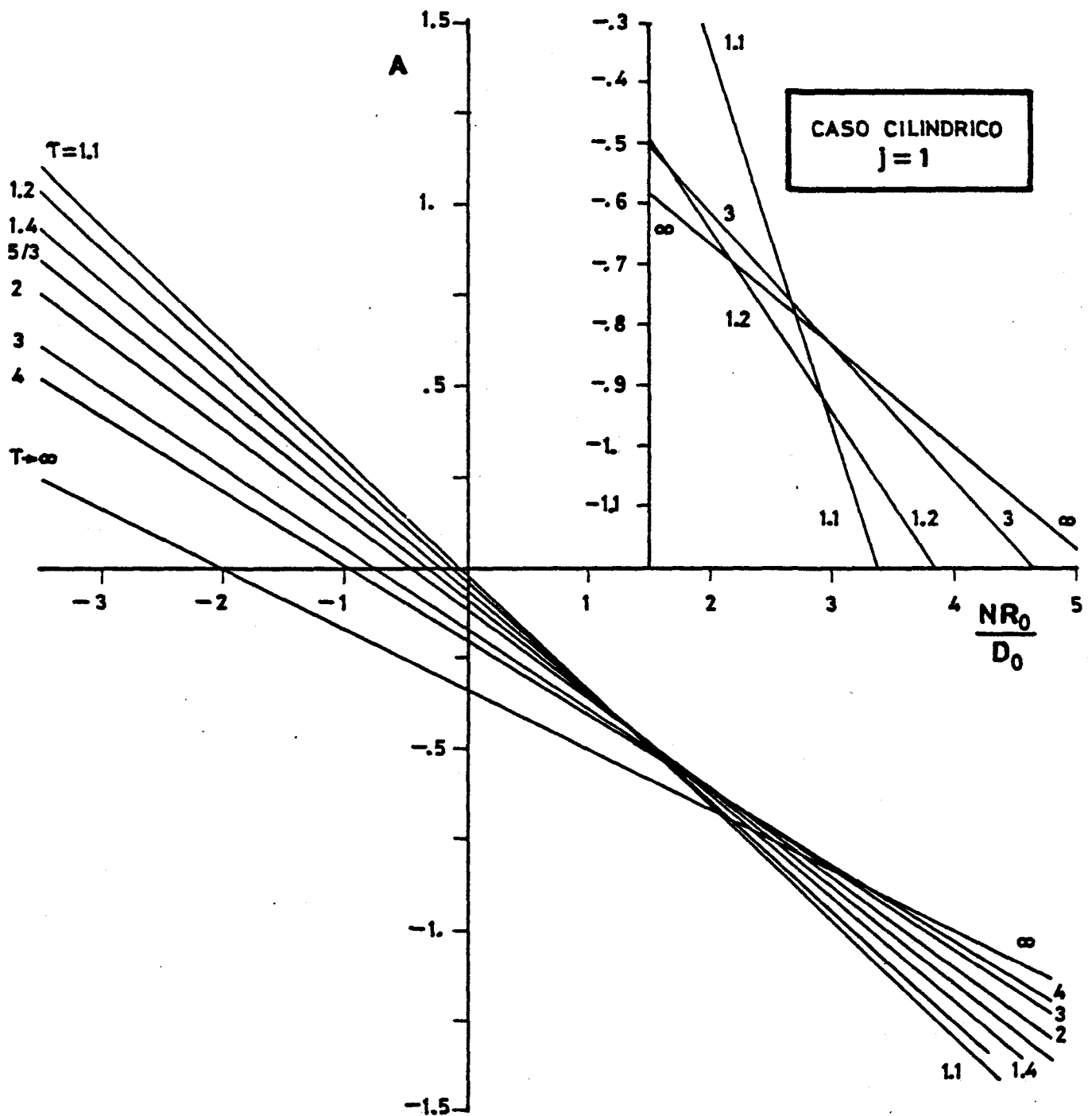


Fig. B01.- Coeficiente  $A$  que determina la aceleración de la onda de choque,  $D/D_0 = 1 + Ax_s$ , en función de la presión impuesta en la superficie exterior,  $p_{sL}/p_{s0} = 1+Nt$ , para diversos valores de la relación de calores específicos  $\gamma$ . Caso cilíndrico ( $j=1$ ) y gas perfecto.

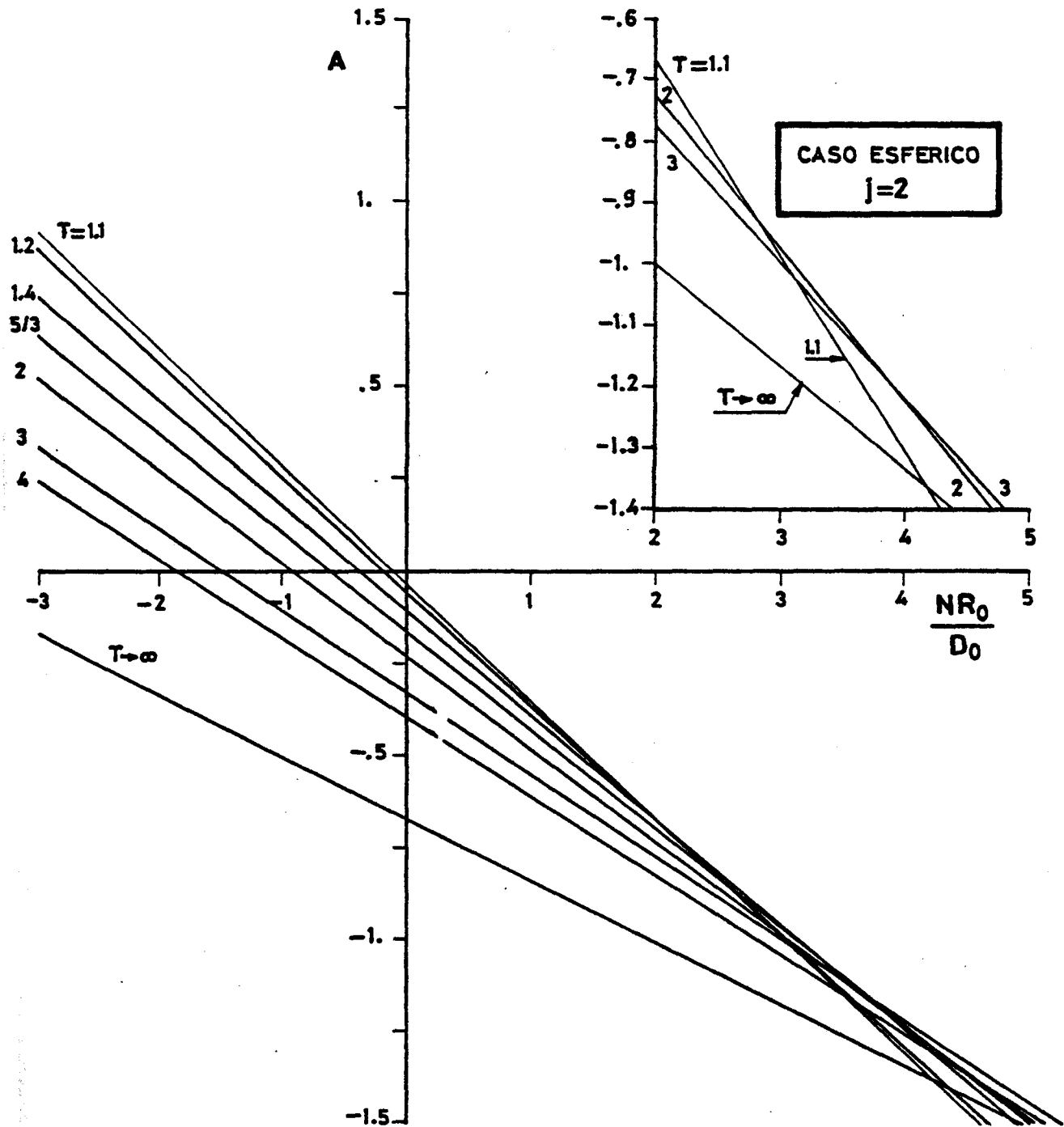


Fig. B02.- Coeficiente  $A$  que determina la aceleración de la onda de choque,  $D/D_0 = 1 + Ax_g$ , en función de la pendiente de la presión impuesta en la superficie exterior,  $p_{sL}/p_{s0} = 1 + Nt$ , para diversos valores de la relación de calores específicos  $\gamma$ . Caso esférico ( $j=2$ ) y gas perfecto.

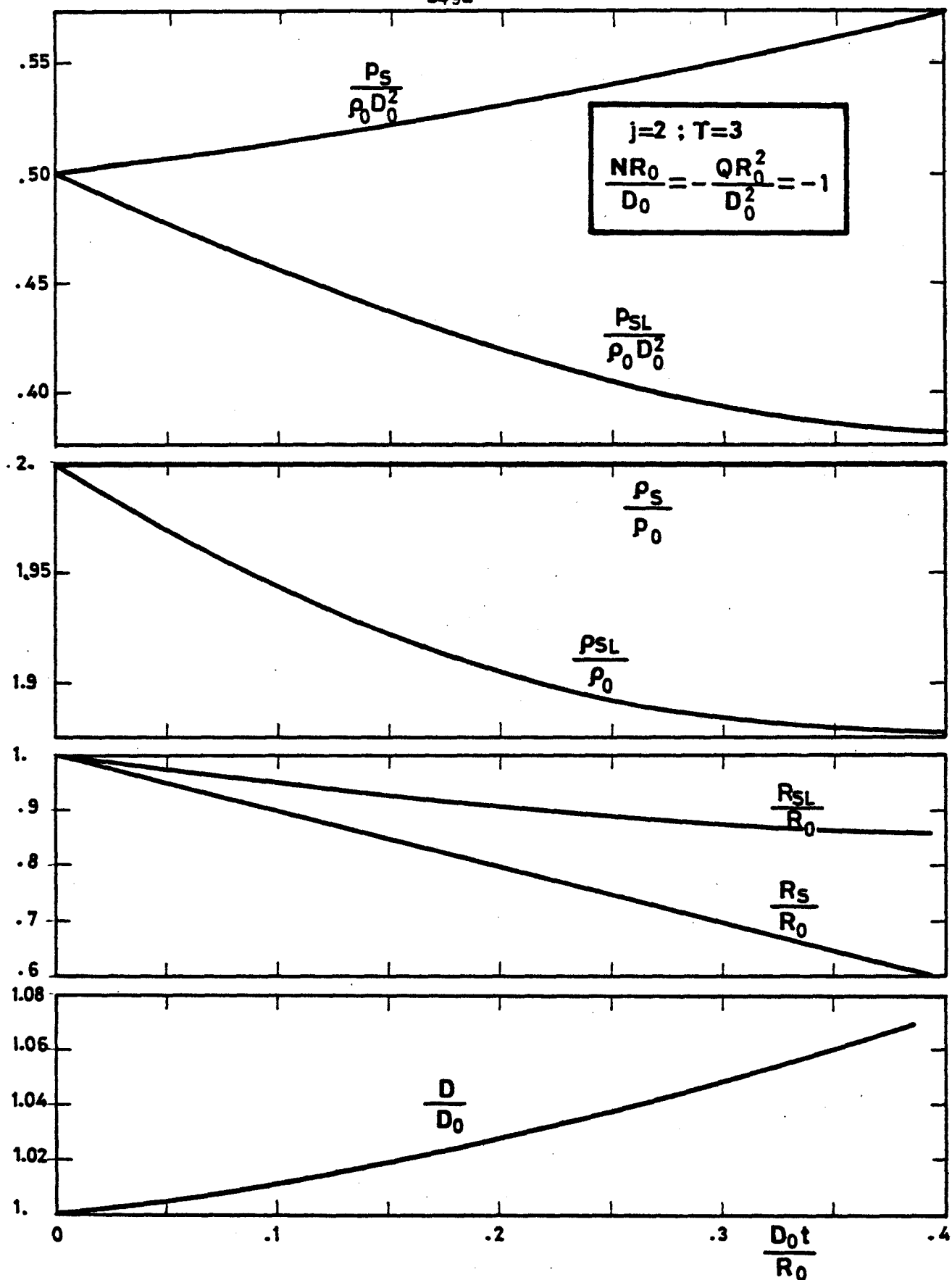


Fig. B03.- Radios, presiones y densidades en la onda de choque y la superficie exterior y velocidad de la onda de choque como función del tiempo. Solución reteniendo términos hasta el orden de  $t^2$ . Gas perfecto. Caso particular indicado en la cabecera de la figura.

8.2.- CASO EN QUE LA ECUACION QUE EXPRESA LA CONTINUIDAD DE LA ENERGIA A TRAVÉS DE LA ONDA DE CHOQUE, SE SUSTITUYE POR LA RELACION EXPERIMENTAL  $D=E+Gu_s$ .

---

La ecuación de estado de los sólidos a altas presiones y temperaturas se determina ensayando en ellos con ondas de choque (Al'tshuler, L.V. y otros; 1958), (Miller, D.; 1965), (Persson, P.A. y Persson, I.; 1964), (Thiel, M. y otros; 1966), (Walsh, J.M. y Christian, R.H.; 1955).

De los resultados experimentales se ha visto que, para intensidades de la onda de choque comprendidas en un margen relativamente amplio, existe una relación lineal entre la velocidad del material detrás de la onda de choque,  $u_s$ , y la velocidad de la onda de choque,  $D$ .

$$D = E + G u_s \quad (B8.2.1)$$

Esta ecuación no es aplicable cuando la presión este por debajo de un valor mínimo que determinaremos a continuación.

Cuando tenemos un sólido semi-infinito y en su superficie exterior aplicamos bruscamente una presión  $p_{s0}$ , se origina una onda de choque plana que avanza hacia el interior del sólido con una velocidad constante  $D_0$ , dejando al material moviéndose a una velocidad constante  $u_s$  a una presión  $p_{s0}$ . Una pequeña perturbación originada en el material, (por ejemplo una pequeña variación de presión respecto al valor constante  $p_{s0}$ ), se propagaría por el material con una velocidad igual a la del sonido en el medio para un observador que se moviese respecto a tierra con la velocidad del material  $u_s$ , y con una velocidad  $c+u_s$  para un observador ligado a tierra. Para que las perturbaciones alcancen a la onda de choque, cosa que ha de ocurrir porque de hecho la onda se acelera o decelera según que aumentemos o disminuyamos la presión en la superficie exterior, la onda de choque ha de tener una velocidad tal que  $D_0 < u_s + c$ . Dado que:



$$c^2 = \gamma_0 \frac{p_{s0}}{\rho_{s0}} = \gamma_0 \frac{f_0}{\psi_0} D_0^2 \quad (\text{B8.2.2})$$

obtenemos:

$$\phi_0 + \sqrt{\gamma_0 \frac{f_0}{\psi_0}} \geq 1 \quad (\text{B8.2.3})$$

por las condiciones detrás de la onda de choque,

$$\phi_0 = f_0; \quad \psi_0 = \frac{1}{1 - \phi_0}$$

la condición (B8.2.3) se convierte en

$$\phi_0 + \sqrt{\gamma_0 \phi_0 (1 - \phi_0)} \geq 1$$

o lo que es lo mismo

$$\phi_0 \geq \frac{1}{\gamma_0 + 1} \quad (\text{B8.2.4})$$

por lo tanto:

$$p_{s0} \geq \frac{1}{\gamma_0 + 1} \rho_0 D_0^2 \quad (\text{B8.2.5})$$

Por lo tanto, la presión que hemos de aplicar en la superficie viene limitada por la condición (B8.2.5).

Para determinar  $\phi_0$ ,  $\phi_1(1)$  y  $\phi_2(1)$ , escribimos la ecuación (B8.2.1) la escribimos en términos de  $\phi$ , desarrollada en potencial de  $x_s$ , e identificando términos del mismo orden, obtenemos:

$$\phi_0 = \frac{1}{G} \left(1 - \frac{E}{D_0}\right) \quad (\text{B8.2.6})$$

$$\phi_1(1) = \frac{A}{G} \frac{E}{D_0} \quad (\text{B8.2.7})$$

$$\phi_2(1) = - \frac{A^2 - B}{G} \frac{E}{D_0} \quad (\text{B8.2.8})$$

Con la condición (B4.10) y la (B8.2.6) se obtiene:

$$D_0 = \frac{E}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 G p_{s0}}{\rho_0 E^2}}\right) \quad (\text{B8.2.9})$$

$$\phi_0 = \frac{1}{G} \left(1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4 G p_{s0}}{\rho_0 E^2}}}\right) \quad (\text{B8.2.10})$$

Con cualquiera de las relaciones (B8.2.9) ó (B8.2.10), la condición (B8.2.5) queda:

$$p_{s0} \geq \frac{\gamma_0 + 1}{(\gamma_0 + 1 - G)^2} \rho_0 E^2 \quad (\text{B8.2.11})$$

Por lo tanto, la ecuación (B8.2.1) no es aplicable cuando la presión en la superficie exterior no cumple la condición (B8.2.11).

Con las relaciones (B8.2.9), (B8.2.10), (B8.2.7) y (B5.17) podemos escribir:

$$\phi_1(1) = \frac{1}{G} \left[ \frac{E/D_0}{1 + \frac{2}{3G\phi_0} \frac{E}{D_0}} \right] \left[ \frac{1-(\gamma_0+1)\phi_0}{3\gamma_0\phi_0} \cdot \frac{NR_0}{D_0} - j \frac{1-\phi_0}{3} \right] \quad (B8.2.12)$$

$$A = \frac{1}{1 + \frac{2}{3G\phi_0} \frac{E}{D_0}} \left[ \frac{1-(\gamma_0+1)\phi_0}{3\gamma_0\phi_0} \cdot \frac{NR_0}{D_0} - j \frac{1-\phi_0}{3} \right] \quad (B8.2.13)$$

De nuevo, en la ecuación (B8.2.13), vuelve a observarse el límite de aplicabilidad de la ecuación (B8.2.1). Cuando  $\phi_0 < 1/(\gamma_0+1)$ , el coeficiente  $NR_0/D_0$  en la ecuación (B8.2.13) es positivo. Cuando  $NR_0/D_0 < 0$  (presión decreciente en la pared exterior) resultaría que la onda de choque se aceleraría, aparte de la aceleración de la onda de choque por efecto de la convergencia geométrica  $-j(1-\phi_0)/3$ , (recuérdese que  $A < 0$  implica que la onda se acelera ya que  $x_s < 0$ ). Esta conclusión es absurda, puesto que una presión decreciente en la pared exterior daría lugar a una onda de choque que se decelera, descontando el efecto de la convergencia antes citado. Por lo tanto ha de ocurrir que  $\phi_0 > 1/(\gamma_0+1)$ , que es la misma conclusión (B8.2.4) o su equivalente (B8.2.11).

De la referencia (Miller, D.; 1965) se han tomado unos valores típicos de las constantes  $\rho_0$ ,  $\gamma_0$ , E y G para el uranio

$$\rho_0 = 19040 \text{ Kg.m}^{-3}$$

$$\gamma_0 = 2.91$$

$$E = 2550 \text{ m.sec}^{-1}$$

$$G = 1.504$$

Con estos valores se ha representado  $D_0/E$  y  $\phi_0$  como función de  $p_{s0}$  en la Fig. B04. En esta figura se ha representado también el valor mínimo admisible de  $p_{s0}$ , sacado de la ecuación (B8.2.11), que para este caso del uranio es  $p_{s0} \geq 0.836$  Mb.

En las Figs. B05 y B06 se ha representado el coeficiente A de la velocidad de propagación de la onda de choque, en función del coeficiente N de la presión aplicada en la superficie exterior (ecuación (B8.2.13)), para distintos valores de  $p_{s0}$  y para los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ) respectivamente.

Para el caso del uranio, citado anteriormente, y en el caso particular de  $p_{s0}=1$  Mb y  $NR_0/D_0 = -1$ , se han representado: la presión detrás de la onda  $p_s$  y en la superficie exterior  $p_{sL}$ , como función del tiempo (Fig. B07); la densidad detrás de la onda  $\rho_s$  y en la superficie exterior  $\rho_{sL}$  como función del tiempo (Fig. B08); el radio de la onda de choque  $R_s$  y de la superficie exterior  $R_{sL}$  en función del tiempo (Fig. B09); y por último, la velocidad de propagación de la onda de choque D como función del tiempo (Fig. B10). En las Figs. B07 a B10, los cálculos se han realizado para el caso esférico y en todos los casos solamente se han retenido hasta términos del orden de  $x_s$ .

## **II.- CONCLUSIONES.**

La solución obtenida en el capítulo B, es válida solamente para tiempos pequeños a partir del instante inicial. Esta solución nos permite predecir el movimiento en todo el campo fluido detrás de la onda de choque.

En la aproximación de orden unidad (4) se recuperan las ecuaciones del caso plano isentrópico (Ecuaciones (B4.1), (B4.2) y (B4.3)).

De particular importancia es la información que se obtiene, relativa a la propagación de la onda de choque (ecuación (B5.17)). El primer sumando de la ecuación (B5.17) representa el efecto de la variación de la presión exterior en la velocidad de propagación de la onda de choque, haciendo que la on

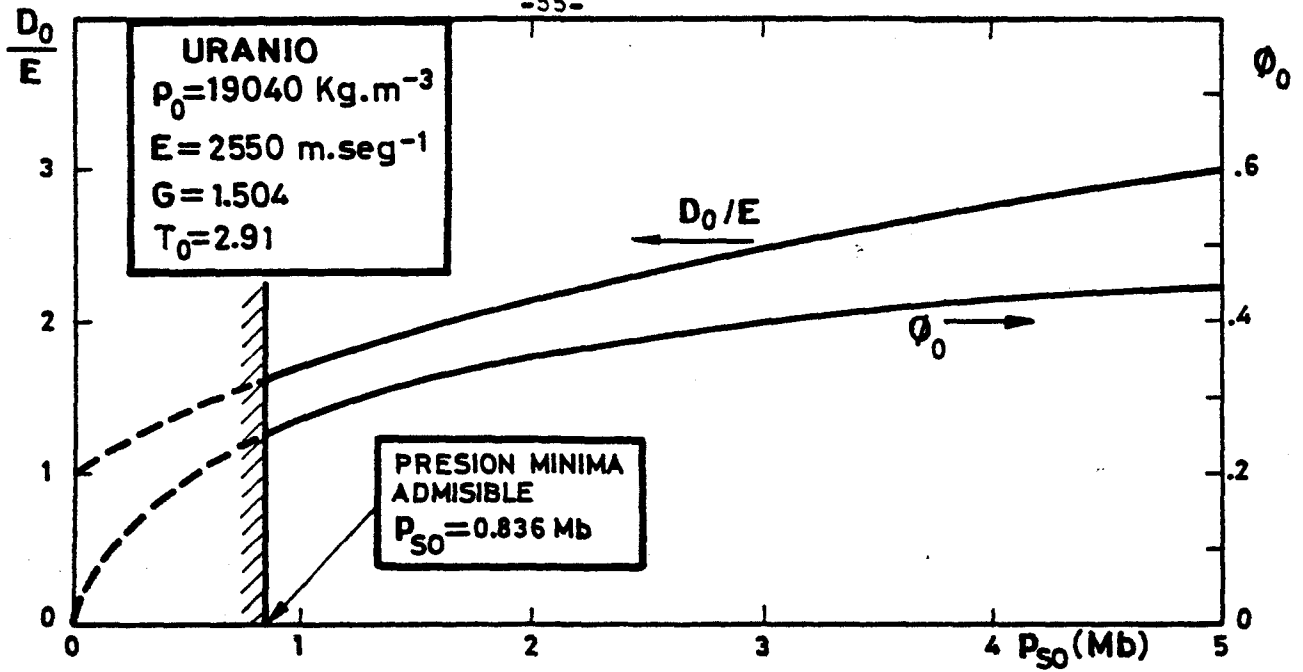


Fig. B04.-

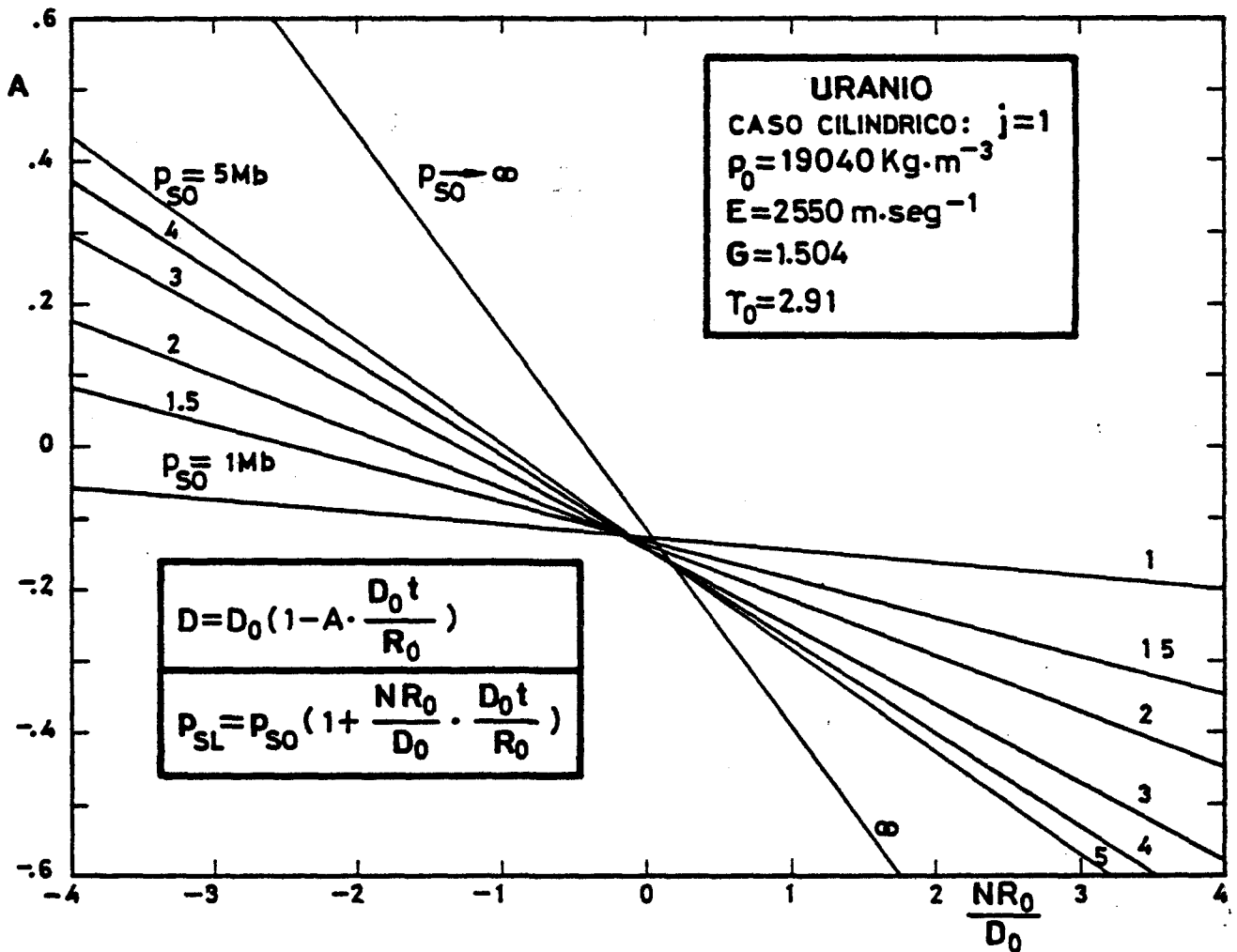


Fig. B05.- Coeficiente A, que determina la aceleración de la onda de choque, en función de la pendiente de la presión impuesta en la superficie exterior, para diversos valores de  $p_{s0}$ . Caso cilíndrico ( $j=1$ ). Relación experimental  $D = E + G u_s$ . Uranio.

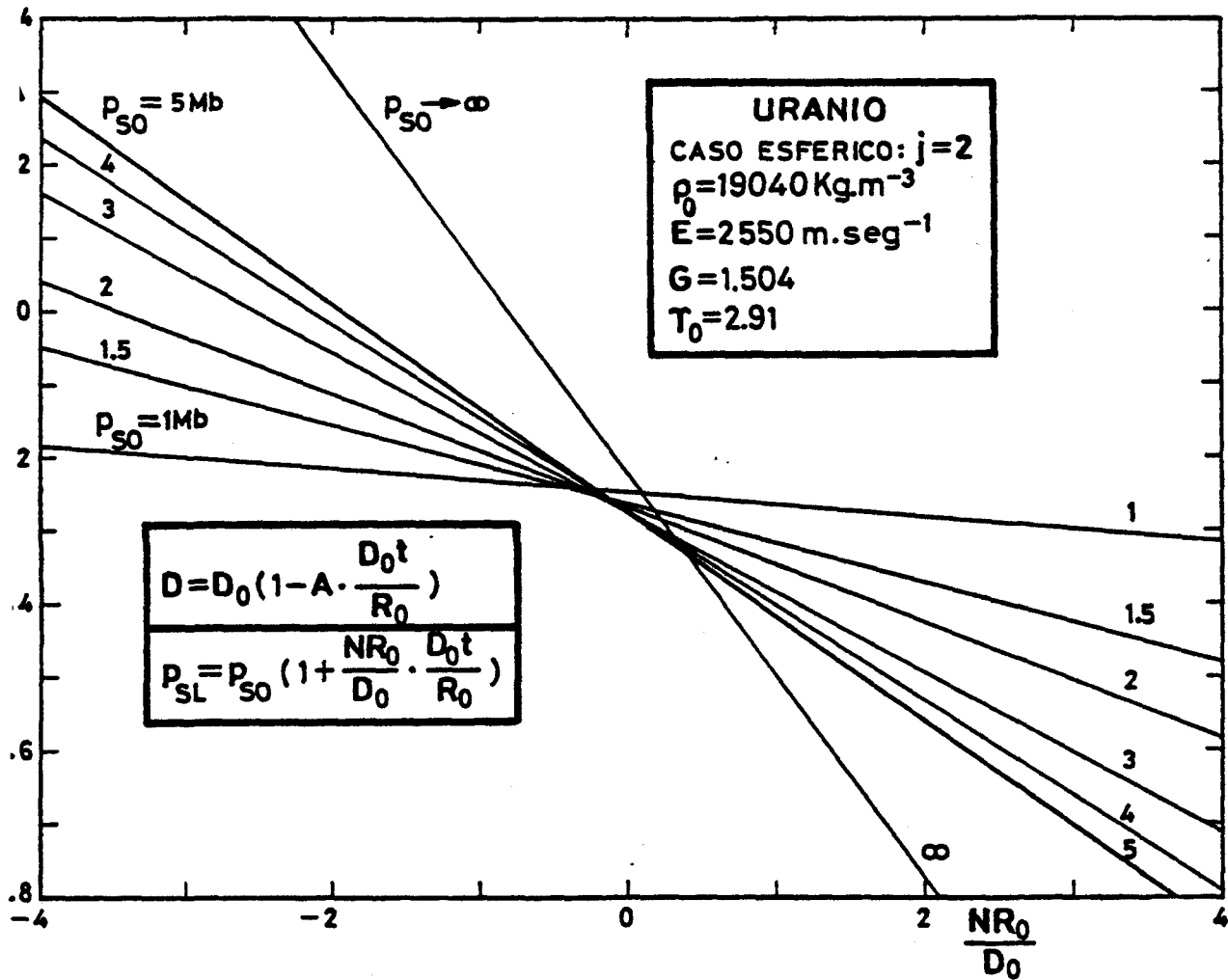


Fig. B06.- Coeficiente A, que determina la aceleración de la onda de choque, en función de la pendiente de la presión impuesta en la superficie exterior, para diversos valores de  $p_{SO}$ . Caso esférico ( $j=2$ ). Relación experimental  $D = E + G u_s$ . Uranio.

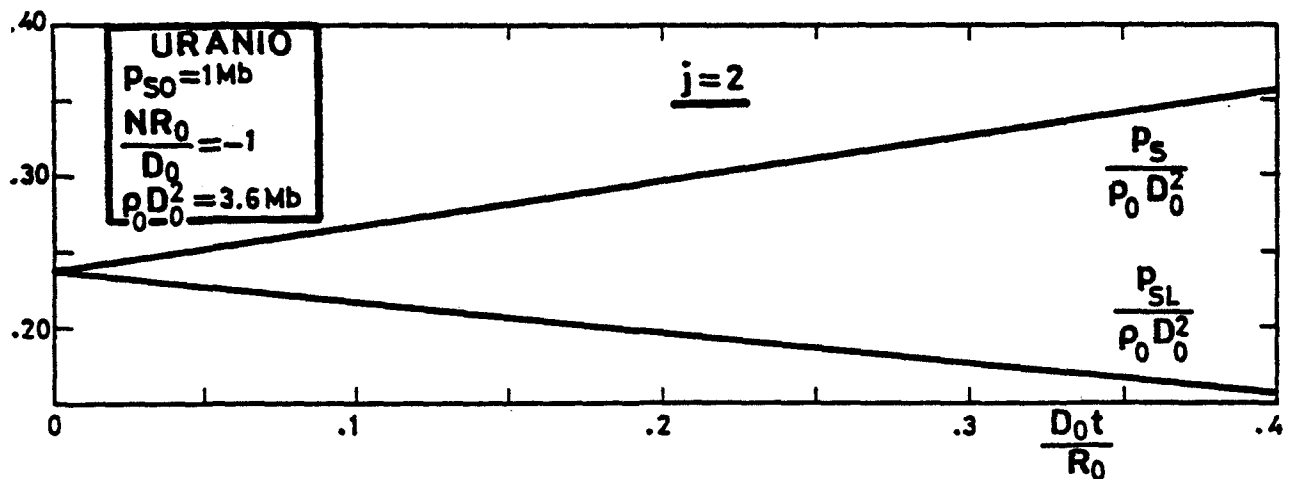


Fig. B07.- Presión en la superficie exterior  $p_{SL}$  y en la onda  $p_S$  como función del tiempo. Caso esférico ( $j=2$ ). Relación experimental  $D=E+Gu_s$ . Uranio.

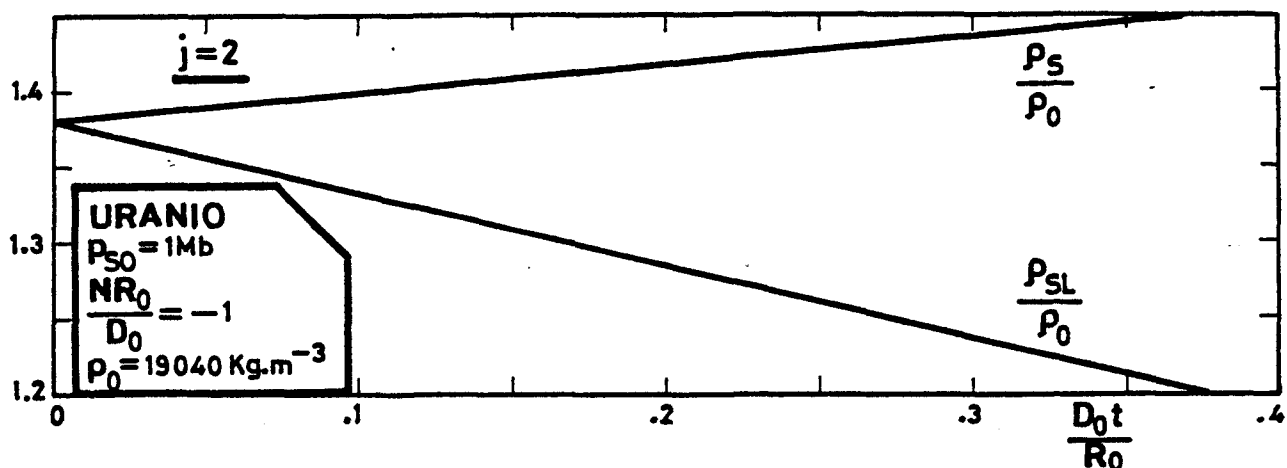


Fig. B08.- Densidad en la superficie exterior  $\rho_{sL}$  y en la onda de choque  $\rho_s$ , como función del tiempo. Caso esférico ( $j=2$ ). Relación experimental  $D = E + Gu_s$ . Uranio.

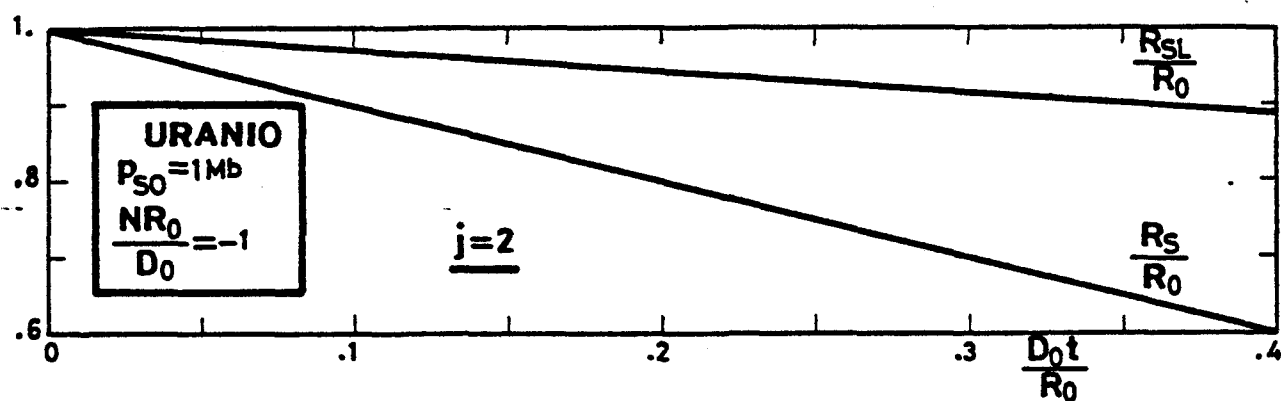


Fig. B09.- Radio de la superficie exterior  $R_{sL}$  y de la onda de choque  $R_s$  como función del tiempo. Caso esférico ( $j=2$ ). Relación experimental  $D = E + Gu_s$ . Uranio.

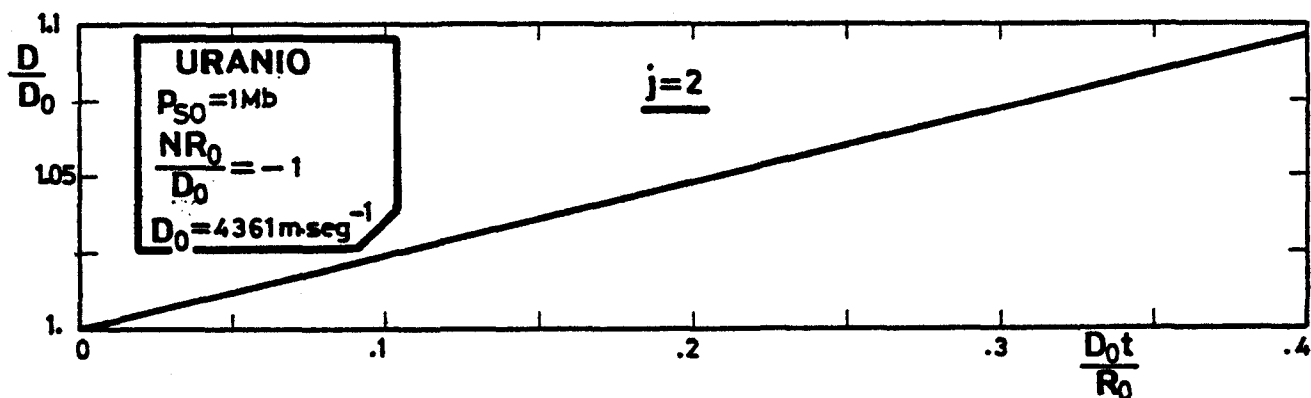


Fig. B10.- Velocidad de propagación de la onda de choque  $D$  como función del tiempo. Caso esférico ( $j=2$ ). Relación experimental  $D = E + Gu_s$ . Uranio.

da se decelere si la presión exterior disminuye y que se acelere en caso contrario. El segundo sumando representa el efecto de la convergencia geométrica, que es siempre un efecto acelerador de la onda. El tercer sumando participa de los dos efectos anteriores, contribuyendo de tal forma que reduce ambos efectos por igual. En general, la expresión de A puede escribirse como:

$$A = \frac{1}{v} \left[ \frac{1 - (\gamma_0 + 1) \phi_0}{3 \gamma_0 \phi_0} \cdot \frac{NR_0}{D_0} - j \frac{1 - \phi_0}{3} \right]$$

donde, como en la ecuación (B5.17), el primer sumando representa el efecto de la variación de la presión exterior y el segundo sumando representa el efecto de la convergencia geométrica.  $v$  es un coeficiente que depende de  $\phi_1(1)$ , siendo  $v > 1$ ;  $v = 1$  en el caso de gas perfecto ( $\phi_1(1)=0$ ) y  $v = 1 + \frac{2}{3G\phi_0} \cdot \frac{E}{D_0}$  para el caso de la relación experimental  $D=E+Gu_s$ .

Como consecuencia de que la onda de choque ha de acelerarse cuando la presión exterior aumenta, cualquier ecuación de estado  $e=e(p,\rho)$ , obtenida experimentalmente, de sólidos sometidos a altas presiones y temperaturas, deja de ser válida por debajo de presiones tales que no se cumpla la relación (B8.2.5) o su equivalente (B8.2.4).

Por último es interesante hacer notar que la formulación del problema es independiente de la ecuación de estado  $e=e(p,\rho)$  necesitándose esta en última instancia. La influencia de la variación, con las variables termodinámicas, de la relación de calores específicos  $\gamma$ , no se nota hasta términos del orden de  $x_s^2$ ; por lo tanto, en primera y segunda aproximación, el valor de  $\gamma$  es el del instante inicial  $\gamma_0$ .



## CAPITULO C

### CAMPO FLUIDO DETRAS DE UNA ONDA DE CHOQUE EN LAS ULTIMAS ETAPAS DE LA IMPLOSION.

#### 1.- INTRODUCCION.

En este capítulo estudiaremos las últimas etapas del proceso implosivo de una onda de choque o de detonación.

Las ecuaciones que determinan el movimiento del fluido detrás de la onda siguen siendo las (3.1), (3.2) y (3.5) con las condiciones en la onda (3.7), (3.8) y (3.9).

En las últimas etapas del proceso implosivo, el radio de la onda,  $R_s$ , es mucho menor que el radio inicial,  $R_0$ . Si, además, la relación de calores específicos,  $\gamma$ , permanece constante, se puede encontrar una formulación de semejanza, donde la variable de semejanza es  $r/(Ct)^\alpha$ , donde el tiempo se mide a partir del instante en que la onda llega al centro de la esfera (cilindro), (Guderley, G.; 1942), (Sedov, L.I.; 1959).

En las ecuaciones de semejanza aparece un autovalor,  $\theta_0$ , ( $\theta_0 = (\alpha - 1)/\alpha$ ) que se determina obligando a que desaparezca una posible singularidad en la solución de las ecuaciones. El autovalor  $\theta_0$  y la constante  $C$  determinan por completo la velocidad de propagación y la posición instantánea de la onda de choque. La constante  $C$  es la única información que se necesita de las etapas anteriores a la final de la implosión y depende de como se ha generado ésta. Su orden de magnitud es  $C \sim (P_0/\rho_0 R_0^{2\theta_0})^{1/2}$ , siendo  $P_0$  la presión característica sobre la superficie exterior y  $R_0$  el radio inicial de la esfera (cilindro).

Cuando  $\alpha=1$  la solución de semejanza corresponde al caso de compresión de la esfera (cilindro) sin ondas de choque, al menos en todo el proceso implosivo (Courant; R. y Friedrichs, K.O.; 1948), (Taylor, G.I.; 1950),

(Ferro Fontan, C. y otros; 1975). Para que la implosión ocurra sin ondas de choque y, por lo tanto, isentrópicamente, la presión exterior ha de crecer aproximadamente como  $(-t)^2$ , siendo  $t$  el tiempo medido desde el instante en que las ondas de compresión alcanzan simultáneamente el centro de la esfera.

Para pulsos de presión exterior más bruscos, las sucesivas ondas de compresión se alcanzan antes de que las primeras lleguen al centro, formando una onda de choque que inicia, no isentrópicamente, el proceso de compresión. Esto es lo que ocurre cuando la bola se comprime mediante la detonación de una cáscara de material detonante exterior. En este capítulo analizaremos las últimas etapas de este proceso de compresión por ondas de choque.

En los apartados siguientes se presenta la formulación para cualquier valor constante de la relación de calores específicos,  $\gamma$ , así como la posición y comportamiento de todos los puntos singulares y el método de solución numérica de las ecuaciones. Se resuelve analíticamente el caso  $(\gamma-1) \ll 1$  y se presenta la solución numérica para el caso asintótico  $\gamma \rightarrow \infty$ .

En el apéndice C-I de este capítulo se dan las ecuaciones que permiten obtener las trayectorias de las partículas, así como la presión a que están sometidas. Se dan también las soluciones de estas ecuaciones en los casos extremos citados anteriormente:  $(\gamma-1) \ll 1$  y  $\gamma \rightarrow \infty$ .

## 2.- LISTA DE SIMBOLOS.

Los símbolos que se dan a continuación complementan a la lista general de símbolos y son específicos de este capítulo.

C, Constante de integración de la ecuación (C3.13)

M, Constante de integración de la ecuación (C3.38) cuando  $P$  y  $V$  tienden a cero.

$P$ , Variable de semejanza definida en (C3.17).

$P^*$ , Valor de  $P$  en el punto crítico, ecuación (C3.28).

$P_3$ , Valor de  $P$  en otro punto, distinto del crítico, donde se anulan numera  
dor y denominador de (C3.38).

$R$ , Variable de semejanza definida en (C3.18).

$R_{\infty}$ , Constante de integración de (C3.39) cuando  $P$  y  $V$  tienden a cero.

$V$ , Variable de semejanza definida en (C3.16).

$V^*$ , Variable de  $V$  en el punto crítico, ecuación (C3.27).

$V_3$ , Valor de  $V$  en otro punto, distinto del crítico, donde se anulan numera  
dor y denominador de (C3.38).

$Z$ , Variable de semejanza definida en (C3.19).

$Z_{\infty}$ , Constante de integración de (C3.26) cuando  $P$  y  $V$  tienden a cero.

$\epsilon$ , Definido como  $\epsilon = \gamma - 1$ .

$\theta_0$ , Autovalor definido en (C3.13).

### 3.- ECUACIONES DE SEMEJANZA.

Cuando nos encontramos en las últimas etapas de la implosión ( $R_s \rightarrow 0$ ), trataremos de buscar una solución a las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.5), con las condiciones (3.7), (3.8) y (3.9), que sea válida para  $R_s \ll R_0$ . Esta solu  
ción, en general, no será válida en la superficie exterior ( $r \sim R_0$ ), por lo que no podremos imponer la condición en la superficie exterior. El problema quedará indeterminado a falta de una condición de contorno.

Dado que perdemos información de lo que ocurre a distancias del origen del orden del radio inicial  $R_0$ , la solución no va a depender de este radio inicial, sino que solo dependerá de una constante  $k$  que engloba toda la información de las etapas anteriores a la final de la implosión. En principio, las variables dependientes  $D$ ,  $R_s$ ,  $p$ ,  $\rho$  y  $u$  del problema serán funciones de la forma:

$$D = D(t, \gamma, \rho_0, k); \quad R_s = R_s(t, \gamma, \rho_0, k)$$

$$p = p(r, t, \gamma, \rho_0, k); \quad \rho = \rho(r, t, \gamma, \rho_0, k)$$

$$u = u(r, t, \gamma, \rho_0, k)$$

Por análisis dimensional, las funciones anteriores se pueden escribir:

$$\frac{D}{\rho_0^a k^b t^{\alpha-1}} = F_0(\gamma); \quad \frac{R_s}{\rho_0^a k^b t^\alpha} = F_1(\gamma)$$

$$\frac{p}{\rho_0 \{\rho_0^a k^b t^{\alpha-1}\}^2} = F_2(\gamma, \frac{r}{\rho_0^a k^b t^\alpha}); \quad \frac{\rho}{\rho_0} = F_3(\gamma, \frac{r}{\rho_0^a k^b t^\alpha})$$

$$\frac{u}{\rho_0^a k^b t^{\alpha-1}} = F_4(\gamma, \frac{r}{\rho_0^a k^b t^\alpha})$$

Si llamamos  $C^\alpha = \rho_0^a k^b \{F_1(\gamma)\}^\alpha$ , las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$R_s = (Ct)^\alpha; \quad Dt/R_s = f_1(\gamma)$$

$$p/p_0 D^2 = f_2(\gamma, \frac{r}{R_s}) \quad (C3.1)$$

$$\rho/p_0 = f_3(\gamma, \frac{r}{R_s}) \quad (C3.2)$$

$$u/D = f_4(\gamma, \frac{r}{R_s}) \quad (C3.3)$$

Si en lugar de la definición de  $\xi$  dada en (4.1) y en lugar de la definición de  $x_s$  dada en (4.2), utilizamos las que se dan a continuación,

$$\xi = \frac{r}{R_s} \quad (C3.4) ; \quad x_s = \frac{R_s}{R_0} \quad (C3.5)$$

las ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.6) siguen siendo válidas, así como la ecuación (4.7) que ahora se puede escribir:

$$\theta_s = \frac{x_s \ddot{x}_s}{x_s^2} = \frac{R_s \ddot{R}_s}{R_s^2} \quad (C3.6)$$

Hay que observar que aunque hemos introducido  $R_0$  en la definición de  $x_s$ , esta escala no interviene para nada en la solución de las ecuaciones. Solamente se ha introducido para el caso en que se intentase relacionar esta solución asintótica con la numérica correspondiente a las etapas previas de la implosión.

Las relaciones (C3.1), (C3.2) y C3.3) obtenidas por análisis dimensional, se pueden escribir como:

$$f = f_2(\xi, \gamma) \quad (C3.7)$$

$$\psi = f_3(\xi, \gamma) \quad (C3.8)$$

$$\phi = f_4(\xi, \gamma) \quad (C3.9)$$

Las relaciones (C3.7), (C3.8) y (C3.9) nos dicen que las variables  $f$ ,  $\psi$  y  $\phi$  no dependen de  $x_s$ ; por lo tanto, las ecuaciones (4.4), (4.5), (4.6), y (C3.6) se reducen a:

$$(\phi - \xi) \frac{d\psi}{d\xi} + \psi \frac{d\phi}{d\xi} + i \frac{\phi\psi}{\xi} = 0 \quad (C3.10)$$

$$(\phi - \xi) \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{1}{\psi} \frac{df}{d\xi} + \theta_s \phi = 0 \quad (C3.11)$$

$$(\phi - \xi) \left\{ \frac{df}{d\xi} - \frac{\gamma f}{\psi} \frac{d\psi}{d\xi} \right\} + 2\theta_s f = 0 \quad (C3.12)$$

$$\frac{R_s \ddot{R}_s}{R_s^2} = \theta_s = \text{constante} = \theta_0 \quad (C3.13)$$

En la ecuación (C3.13)  $\theta_s$  ha de ser constante porque la solución del problema no depende explícitamente del tiempo. Solo depende del tiempo a través de  $D(t)$  o su equivalente  $R_s(t)$ .

La integración de la ecuación (C3.13) nos da:

$$R_s = (Ct)^{1/(1-\theta_0)} \quad (C3.14)$$

$$D = \frac{C}{1-\theta_0} (Ct)^{\theta_0/(1-\theta_0)} \quad (C3.15)$$

Para la integración de (C3.13) se ha considerado que  $R_s=0$  en  $t=0$ ; ocurriendo el proceso de implosión en  $t<0$ . Dado que en  $t=0$  es  $R_s=0$  y  $D \rightarrow \infty$ ,  $\theta_0$  ha de ser negativo. Por otra parte, como en la implosión es  $t<0$ , la constante  $C$  ha de ser negativa para que  $Ct>0$ .

Obsérvese que (C3.14) coincide con la forma obtenida anteriormente por análisis dimensional.

Las ecuaciones (C3.10), (C3.11) y (C3.12) son invariantes frente al grupo de transformaciones o cambios de escala siguientes:

$$\phi \rightarrow a\phi ; \quad \xi \rightarrow a\xi ; \quad \psi \rightarrow b\psi \quad f \rightarrow a^2bf$$

por lo tanto conviene reescribir las ecuaciones utilizando las variables,

$$V = \frac{\phi}{\xi} \quad (C3.16); \quad P = \frac{f}{\xi^2 \psi} \quad (C3.17)$$

$$R = \ln \psi \quad (C3.18); \quad Z = \ln \xi \quad (C3.19)$$

donde  $V$  y  $P$  son invariantes ante el grupo anterior de transformaciones<sup>(\*)</sup>

---

(\*)

Welsh (Whelsh, R.L.; 1967), que discute la solución de semejanza de la implosión y la obtiene numéricamente para el caso  $\gamma=3$ , utiliza variables análogas. Por elección adecuada de la escala temporal o espacial puede elegir  $C=-1/\alpha \approx \theta_0-1$ ; nuestra  $\xi$  es igual que su  $-\xi^{-\alpha}$ , su  $r$  es nuestra  $V$ , y su  $s^2$  es nuestra  $\gamma P$ .

Con ello se obtienen las ecuaciones:

$$(v-1) \frac{dR}{dz} + \frac{dv}{dz} + (j+1)v = 0 \quad (C3.20)$$

$$(v-1) \left( \frac{dv}{dz} + v \right) + \frac{dP}{dz} + P \frac{dR}{dz} + 2P + \theta_0 v = 0 \quad (C3.21)$$

$$(v-1) \left[ \frac{dP}{dz} - (\gamma-1) P \frac{dR}{dz} + 2P \right] + 2\theta_0 P = 0 \quad (C3.22)$$

Combinando adecuadamente (C3.20) y (C3.22) se obtiene la ecuación al  
g brica:

$$\ln P - (\gamma-1 + \frac{2\theta_0}{j+1})R - \frac{2\theta_0}{j+1} \ln(1-v) + 2(1-\theta_0)Z = \text{constante} \quad (C3.23)$$

donde la constante se calcular  con las condiciones en la onda de choque.

El sistema de ecuaciones (C3.20), (C3.21) y (C3.22) se puede escribir como:

$$\{(v-1)^2 - \gamma P\} \frac{dR}{dz} = \frac{1}{v-1} \{ v(v-1) [\theta_0 - j(v-1)] - 2\theta_0 P \} \quad (C3.24)$$

$$\{(v-1)^2 - \gamma P\} \frac{dP}{dz} = \frac{P}{v-1} \left\{ 2P [\gamma(v-1) + \theta_0] + (v-1) \theta_0 [(\gamma-3)v + 2] - \right. \\ \left. - (v-1) [v\{2 + (\gamma-1)j\} - 2] \right\} \quad (C3.25)$$

$$\{(v-1)^2 - \gamma P\} \frac{dv}{dz} = P \{ \gamma(j+1)v + 2\theta_0 \} - v(v-1)^2 - v(v-1)\theta_0 \quad (C3.26)$$



Este sistema de ecuaciones da valores infinitos para las derivadas de las magnitudes fluidas respecto a  $Z$  en la curva:  $\gamma P = (V-1)^2$ . Estos valores infinitos se evitarán únicamente si la solución cruza la curva por los puntos donde se anulen simultáneamente los segundos miembros de las ecuaciones anteriores. A estos puntos,  $(V^*, P^*)$ , les llamaremos puntos críticos. De este modo se obtiene:

$$\theta_0 = \frac{j\gamma V^*(V^*-1)}{(\gamma-2)V^*+2} \quad (C3.27)$$

$$P^* = (V^*-1)^2/\gamma \quad (C3.28)$$

Las condiciones en la onda de choque (4.8), (4.9) y (4.10), escritas en las nuevas variables quedan:

$$P_s = V_s(1-V_s) \quad (C3.29)$$

$$R_s = -\ln(1-V_s) \quad (C3.30)$$

$$Z_s = 0 \quad (C3.31)$$

$$\frac{e_s + q}{D^2} = \frac{1}{2} V_s^2 \quad (C3.32)$$

Para las últimas etapas de la implosión ( $R_s \rightarrow 0$ ), la velocidad de propagación de la onda  $D$  es muy grande ( $D \rightarrow \infty$ ). El cociente  $e_s/D^2$  y  $V_s$  tienden a un valor finito (función de  $\gamma$ ). Como  $q$  es un valor finito que solo depende del material detonante,  $q/D^2 \rightarrow 0$ . Por lo tanto, la condición (C3.32), para ondas de choque y de detonación, se reduce a:

$$\frac{e_s}{D^2} = \frac{1}{2} V_s^2 \quad (C3.33)$$

Para la existencia de la solución de semejanza es necesario que  $e_s/D^2$  se mantenga constante. Esto ocurre, en particular, cuando el fluido se comporta como un gas perfecto, siendo  $(e_s/D^2) = \gamma P_s/(\gamma-1)$ . Las condiciones de contorno en la onda de choque se reducen a:

$$Z_s = 0 \quad (C3.34) ; \quad R_s = \ln \{ (\gamma+1)/(\gamma-1) \} \quad (C3.35)$$

$$V_s = 2/(\gamma+1) \quad (C3.36) ; \quad P_s = 2(\gamma-1)/(\gamma+1)^2 \quad (C3.37)$$

Cuando tenemos un metal en el que se cumple la relación experimental  $D = E + Gu_s$ , las relaciones (C3.34), (C3.35), (C3.36) y (C3.37), siguen siendo válidas sin más que cambiar  $\gamma$  por  $2G-1$ . La razón de que sean válidas estas condiciones es debido a que para  $D \rightarrow \infty$ , la relación experimental  $D = E + Gu_s$  se puede escribir como:

$$\phi(1) = \frac{1}{G}$$

puesto que  $E/D \rightarrow 0$ . Como para un gas perfecto se obtiene  $\phi(1) = 2/(\gamma+1)$ , resulta  $\gamma = 2G-1$ .

En definitiva, nuestro problema se reduce a resolver, con las condiciones de contorno (C3.34) a (C3.37), la ecuación diferencial,

$$\frac{dP}{dV} = \frac{P}{V-1} \cdot \frac{2P\{\gamma(V-1)+\theta_0\}+\theta_0(V-1)\{(\gamma-3)V+2\} - (V-1)^2 \{[2+(\gamma-1)j] V-2\}}{P\{\gamma(j+1)V+2\theta_0\} - V(V-1)(V-1+\theta_0)} \quad (C3.38)$$

para obtener  $P(V)$ ; la ecuación,

$$\frac{dR}{dV} = \frac{1}{V-1} \cdot \frac{V(V-1)\{\theta_0-j(V-1)\} - 2\theta_0 P}{P\{\gamma(j+1)V+2\theta_0\} - V(V-1)(V-1+\theta_0)} \quad (C3.39)$$

integrable mediante una cuadratura, para obtener  $R(V)$ , y, finalmente, calcularemos  $Z(V)$  mediante la relación:

$$\ln P - (\gamma - 1)R - \frac{2\theta_0}{j+1} \{R + \ln(1-V)\} + 2(1-\theta_0)Z = \ln \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^\gamma \quad (C3.40)$$

El autovalor  $\theta_0$  ha de calcularse como parte de la solución de (C3.38) con ayuda de las condiciones (C3.27) y (C3.28).

#### 4.- METODO DE SOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

Integrando la ecuación (C3.38) con la condición de contorno (C3.36) y (C3.37) seríamos capaces de obtener  $P=P(V, \theta_0, j, \gamma)$ . Sin embargo, como indicamos antes, solo mediante la elección adecuada de  $\theta_0 = \theta_0(j, \gamma)$ , se evitan infinitos en la solución al alcanzar la línea  $\gamma P = (V-1)^2$ . Esto es,  $\theta_0$  ha de ser tal que la solución pase por el punto crítico dado por (C3.27) y (C3.28).

Debido a que la ecuación (C3.38) ha de integrarse numéricamente, el autovalor  $\theta_0$  ha de obtenerse mediante un método iterativo.

De la ecuación (C3.27) se obtiene:

$$V^* = \frac{\{j\gamma + \theta_0(\gamma - 2)\} \pm \sqrt{\{j\gamma + \theta_0(\gamma - 2)\}^2 + 8\theta_0 j \gamma}}{2j\gamma} \quad (C4.1)$$

La pendiente en el punto crítico es:

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)^* = \frac{b - c \pm \sqrt{(b-c)^2 + 4ae}}{2e}$$

donde los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $e$  se dan en el apartado (6) de este capítulo y son función de  $V^*$ ,  $P^*$ ,  $\theta_0$ ,  $j$  y  $\gamma$ .

Para resolver la ecuación (C3.38) por un procedimiento de iteración que nos permita obtener  $\theta_0$ , se elige un valor de  $\theta_0$  arbitrario, con lo que se determinaría la posición del punto crítico (ecuaciones (C4.1) y (C3.28)) y la pendiente en el punto crítico (C4.2). En el apartado (6) se discute la elección del signo. Con los valores anteriores conocidos se integra (C3.38) desde  $V=V^*$  hasta el valor que tiene en la onda de choque ( $V=V_s$ ; (C3.36)). Si al llegar a  $V=V_s$  no se cumple  $P=P_s$  (C3.37), se corrige el valor de  $\theta_0$  y se repite el proceso hasta que en  $V=V_s$  sea  $P=P_s$ . Cuando esto ocurra, ya se tiene el valor de  $\theta_0$ ,  $V^*$  y  $P^*$  y el resto de las integraciones numéricas ya no ofrecen dificultad.

La ecuación (C3.38) tiene seis puntos críticos donde se anulan numerador y denominador simultáneamente. Sin embargo, solo dos de estos puntos son también puntos críticos del sistema de ecuaciones (C3.24) a (C3.26), (para un valor de  $\theta_0$ ,  $j$  y  $\gamma$  la ecuación (C4.1) tiene dos raíces). Los otros tres puntos críticos de (C3.38) son: el origen  $V=0$ ,  $P=0$ ; los puntos  $V=1$ ,  $P=0$ ;  $V=1-\theta_0$ ,  $P=0$ , y el punto de coordenadas  $V_3$ ,  $P_3$  que determinaremos en el apartado (6) de este capítulo.

Físicamente, la solución al problema planteado no ha de presentar ningún infinito, por lo tanto ha de pasar de forma continua por uno de los dos puntos críticos dados por (C3.28) y (C4.1).

Cuando estamos lejos de la onda de choque,  $\xi \rightarrow \infty$ , las relaciones (C3.16) y (C3.17) se reducen a  $V \rightarrow 0$  y  $P \rightarrow 0$ , lo que muestra que la solución también pasa por el punto crítico de (C3.38) situado en el origen.

En el apartado (6) de este capítulo se hace un estudio de la solución en el entorno de los puntos críticos, apoyándonos en los resultados que obtengamos en los casos límites que resolveremos a continuación y en los casos que presenta la literatura, para los cuales se conoce  $\theta_0$ .

### 5.1.- SOLUCIÓN PARA VALORES GRANDES DE $\gamma$ .

En el límite  $\gamma \rightarrow \infty$ , la onda de choque está situada en  $V_s \rightarrow 0$  y  $P_s \rightarrow 0$  (condiciones (C3.36) y (C3.37)). Por lo tanto la solución colapsa hacia el punto (0,0) del plano P,V. Para poder obtener el valor del autovalor  $\theta_0$  es necesario dilatar las variables. A la vista de las relaciones (C3.34), (C3.35) (C3.36) y (C3.37) tomaremos como nuevas variables:

$$R' = \gamma R; \quad V' = \gamma V; \quad P' = \gamma P \quad \text{y} \quad Z' = Z$$

cuyos valores en la onda de choque son:

$$R'_s = 2; \quad V'_s = 2; \quad P'_s = 2 \quad \text{y} \quad Z'_s = 0$$

La ecuación (C4.1) nos da:

$$V'_1{}^* = - \frac{2\theta_0}{\theta_0 + j}; \quad P'_1{}^* = 1 \quad (\text{correspondiente al signo - de (C4.1)})$$

$$V'_2{}^* = \frac{j + \theta_0}{j} \gamma \rightarrow \infty; \quad P'_2{}^* = \left( \frac{\theta_0}{j} \right)^2 \quad (\text{correspondiente al signo + de (C4.1)})$$

por lo tanto, la posición del punto crítico ha de ser la correspondiente al signo "menos" de (C4.1),  $V'_1{}^*$ .

Las ecuaciones (C3.38) y (C3.39) escritas en las nuevas variables quedan:

$$\frac{dP'}{dV'} = \frac{P' \{ 2P' + (\theta_0 + j)V' + 2(\theta_0 - 1) \}}{P' \{ (j+1)V' + 2\theta_0 \} + (\theta_0 - 1)V'} \quad (C5.1.1)$$

$$\frac{dR'}{dV'} = \frac{2\theta_0 P' + (\theta_0 + j)V'}{P' \{ (j+1)V' + 2\theta_0 \} + (\theta_0 - 1)V'} \quad (C5.1.2)$$

La pendiente de (C5.1.1) en el punto crítico es el indicado en (C4.2) con:

$$a = -(\theta_0 + j); \quad b = -2; \quad c = -(\theta_0 + j); \quad e = - \frac{2\theta_0(\theta_0 - 1)}{\theta_0 + j} \quad (C5.1.3)$$

y la pendiente de (C5.1.1) en el punto crítico es:

$$\left( \frac{dR'}{dV'} \right)^* = \frac{(\theta_0 + j)^2 + 2\theta_0(\theta_0 + j) \left( -\frac{dP'}{dV'} \right)^*}{(\theta_0 + j)^2 + 2\theta_0(\theta_0 - 1) \left( -\frac{dP'}{dV'} \right)^*} \quad (C5.1.4)$$

Eligiendo un valor arbitrario de  $\theta_0$  ( $\theta_0 < 0$ ) y como valor de  $(dP'/dV')^*$  el correspondiente al signo "menos" de la ecuación (C4.2), e integrando numéricamente (C5.1.1), somos capaces de llegar al punto (2,2) (onda de choque) después de varias iteraciones que nos dan el valor correcto de  $\theta_0$ .

Si elegimos el signo "mas" en la ecuación (C4.2) el proceso de iteración, para calcular  $\theta_0$ , no converge. Por lo tanto, la pendiente correcta en el punto crítico es la correspondiente al signo "menos" de la raíz.

Una vez determinado el valor correcto de  $\theta_0$  procedemos a la integración simultánea de las ecuaciones (C5.1.1) y (C5.1.2). Cuando nos acercamos hacia  $V' \rightarrow 0$ , la integración numérica nos da que:

$$\frac{dP'}{dV'} \rightarrow 0 \quad \frac{P'}{V'^2} \rightarrow \text{constante}$$

lo que nos indica que la pendiente en el origen es nula.

Una vez obtenidos  $P' = P'(V')$  y  $R' = R'(V')$ , los valores de  $Z = Z(V')$  los obtenemos de la ecuación algébrica, que para  $\gamma \rightarrow \infty$  se reduce a:

$$\ln P' - R' + 2(1-\theta_0)Z = \ln 2 - 2$$

Los resultados obtenidos se dan en las tablas C01, C02, y C03 y en las Figs. C01, C02 y C03.

j	$\theta_0$	$V'^*$	$P'^*$
1 (Cilindrico)	- 0.375425	1.202177	1
2 (esferico)	- 0.699844	1.076554	1

Tabla C01.- Autovalor  $\theta_0$  y coordenadas del punto crítico en los casos cilíndrico y esférico, para valores grandes de  $\gamma$ .

$\gamma \rightarrow \infty$							
CILINDRICO $j=1; \theta_0 = -0.375425$				ESFERICO $j=2; \theta_0 = -0.699844$			
$\gamma V$	$\gamma P$	$\gamma R$	$Z$	$\gamma V$	$\gamma P$	$\gamma R$	$Z$
2.	2.	2.	0.	2.	2.	2.	0.
1.9	1.8675	2.0069	.02743	1.9	1.8898	2.0032	.01761
1.8	1.7368	2.0140	.05638	1.8	1.7800	2.0069	.03631
1.7	1.6081	2.0214	.08706	1.7	1.6706	2.0108	.05611
1.6	1.4813	2.0292	.1198	1.6	1.5616	2.0147	.07711
1.5	1.3567	2.0372	.1546	1.5	1.4531	2.0188	.09950
1.4	1.2344	2.0457	.1920	1.4	1.3456	2.0233	.1234
1.3	1.1146	2.0546	.2324	1.3	1.2382	2.0280	.1493
1.202177	1.	2.0638	.2752	1.2	1.1308	2.0329	.1774
1.2	.9974	2.0641	.2762	1.1	1.0247	2.0381	.2079
1.1	.8827	2.0741	.3243	1.076559	1.	2.0394	.2155
1.	.7717	2.0847	.3770	1.	.9194	2.0437	.2415
.9	.6641	2.0959	.4356	.9	.8150	2.0497	.2787
.8	.5605	2.1081	.5017	.8	.7116	2.0563	.3205
.7	.4613	2.1212	.5773	.7	.6094	2.0634	.3682
.6	.3671	2.1354	.6655	.6	.5087	2.0713	.4237
.5	.2789	2.1512	.7711	.5	.4098	2.0801	.4899
.4	.1977	2.1688	.9026	.4	.3133	2.0903	.5718
.3	.1253	2.1889	1.0757	.3	.2200	2.1023	.6794
.2	.06424	2.2124	1.3271	.2	.1316	2.1172	.8349
.1	.01933	2.2409	1.7740	.1	.05190	2.1377	1.1146
.05	.005426	2.2583	2.2422	.05	.01900	2.1525	1.4145
.01	.0002422	2.2745	3.3784	.01	.001301	2.1704	2.2085
$8.25 \times 10^{-4}$	$1.695 \times 10^{-6}$	2.2786	5.1837	$2.72 \times 10^{-4}$	$1.201 \times 10^{-6}$	2.1769	4.2658
0.	0.	2.2789	-	0.	0.	2.1771	-

Tabla C02.- Valores numéricos de  $\gamma P$ ,  $\gamma R$  y  $Z$  como función de  $\gamma V$ , en los casos cilíndrico y esférico y para valores grandes de  $\gamma$ .



Cuando  $\gamma V = V' \rightarrow 0$ ,  $\gamma P' \rightarrow 0$  y la solución es de la forma:

$$\gamma P \rightarrow M(\gamma V)^2$$

$$\gamma R \rightarrow \gamma R_{\infty} - \frac{\theta_0 + j}{1 - \theta_0} (\gamma V)$$

$$Z \rightarrow Z_{\infty} - \frac{\ln(\gamma V)}{1 - \theta_0}$$

j	M	$\gamma R_{\infty}$	$Z_{\infty}$
1	2.490	2.2789	0.02173
2	16.229	2.1771	-0.5637

Tabla C03.- Constantes que determinan la solución  
asintótica  $\gamma V \rightarrow 0$

## 5.2.- SOLUCION PARA $\gamma - 1$ PEQUEÑOS.

Vamos a resolver las ecuaciones diferenciales (C3.38), (C3.39) y (C3.26) con las condiciones de contorno (C3.34) a (C3.37) para el caso en que  $(\gamma - 1) = \epsilon$  es un número mucho menor que la unidad. Utilizaremos la ecuación algébrica (C3.40) como comprobación de las soluciones obtenidas.

Buscaremos la solución en forma de dos desarrollos asintóticos (Cole, J.D.; 1968) de P como función de V para valores pequeños de  $\epsilon$ , puesto que no existe un desarrollo convergente uniformemente válido. En un desarrollo "exterior" escribiremos P como suma de funciones de  $(1-V)$  multiplicadas por funciones de  $\epsilon$  de órdenes crecientes ( $\epsilon$ ,  $\epsilon\sqrt{\ln \epsilon}$ ,  $\epsilon\sqrt{\epsilon}$ , ...). Este desarrollo no representa asintóticamente la

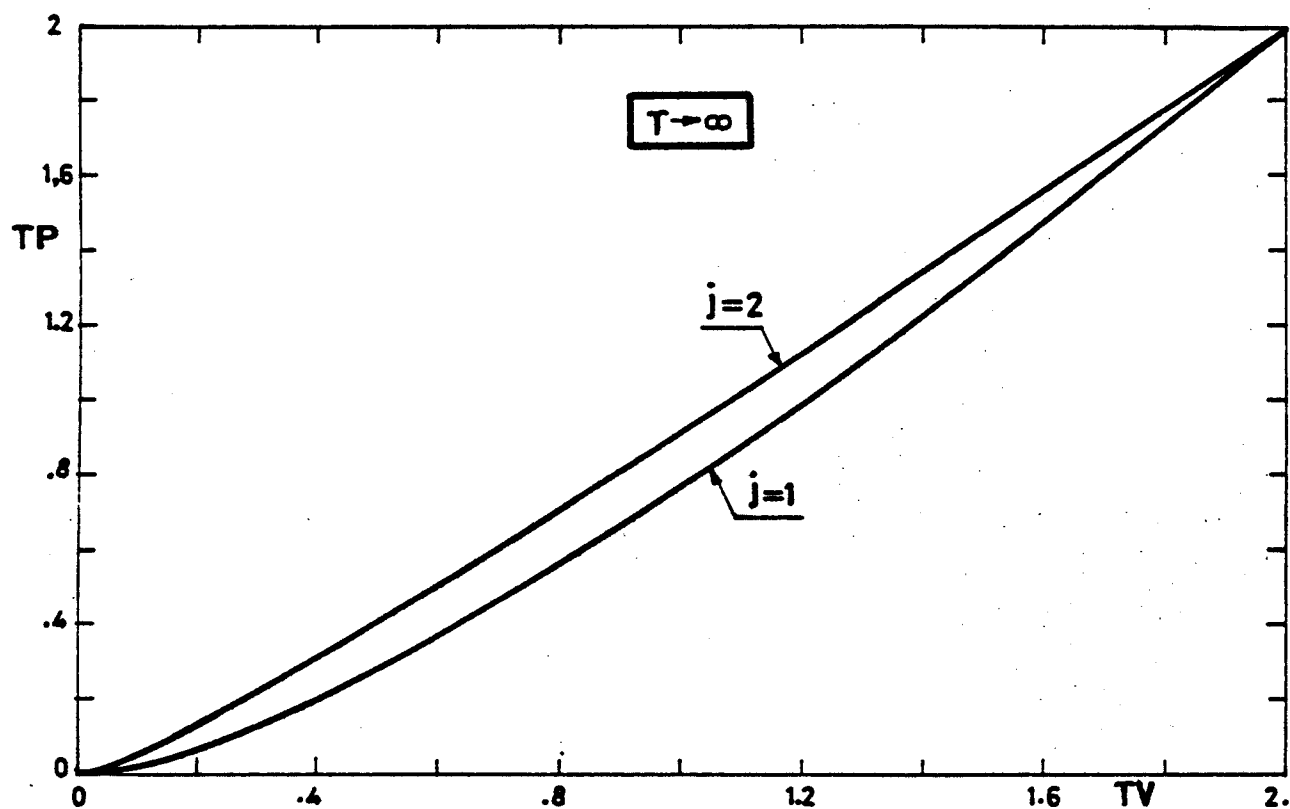


Fig. C01.-  $\gamma_P$  como función de  $\gamma_V$  en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ).  
Solución válida para valores grandes de  $\gamma$ .

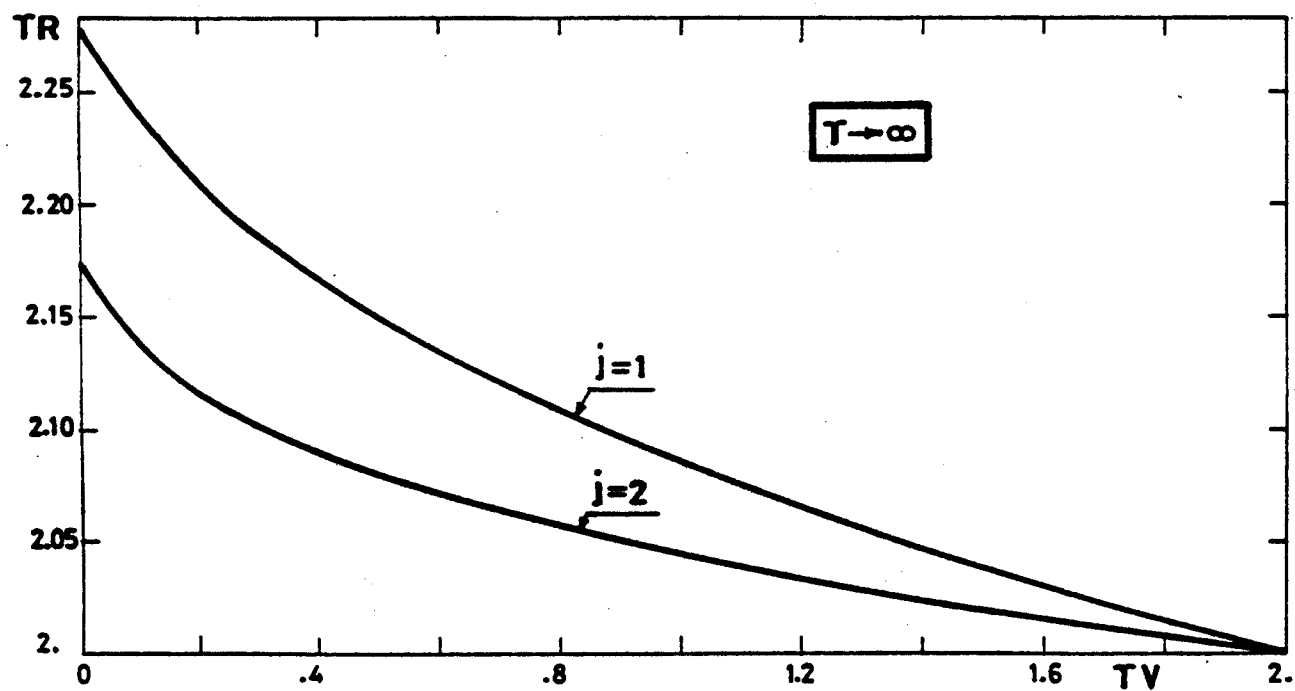


Fig. C02.-  $\gamma_R$  como función de  $\gamma_V$  en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ).  
Solución válida para valores grandes de  $\gamma$ .

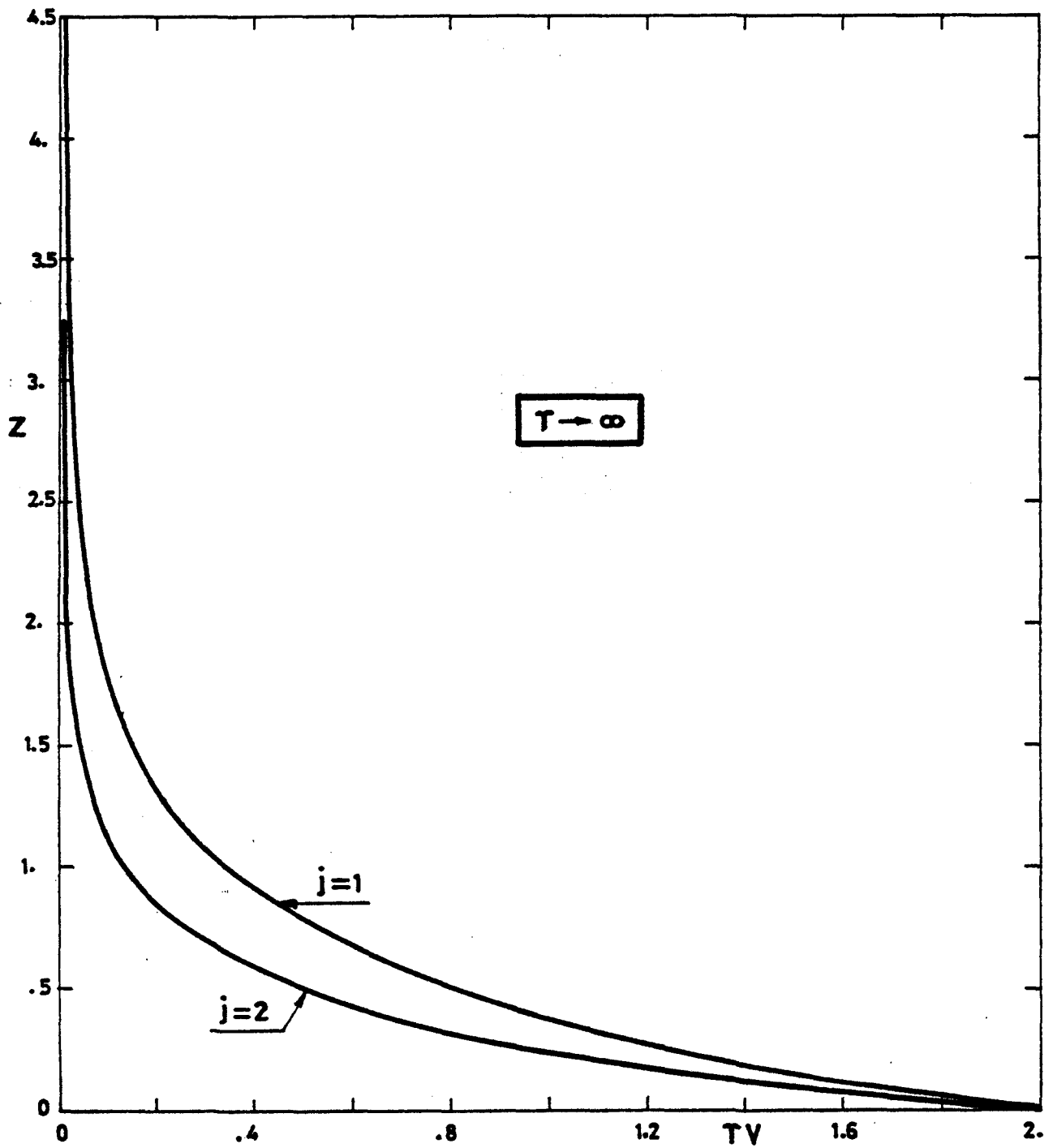


Fig. C03.-  $Z$  como función de  $\gamma V$  en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ). Solución válida para valores grandes de  $\gamma$ .

solución para valores de  $(1-V)$  del orden de  $\sqrt{\epsilon}$ ; esto es: en las proximidades del punto crítico y onda de choque. Para esta región escribiremos un desarrollo en el que utilizaremos como variable independiente  $(1-V)/\sqrt{\epsilon}$  en lugar de  $(1-V)$ . Con estos desarrollos generaremos una solución asintótica uniformemente válida para  $(\gamma-1) \rightarrow 0$ .

Cuando estamos en las proximidades de la onda de choque,

$$P_s \rightarrow \frac{1}{2} \epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$V_s \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \epsilon + O(\epsilon^2)$$

Admitiendo que en las proximidades del punto crítico  $P$  se mantiene de orden  $\epsilon$ ,  $P^* = \epsilon y^*$ , las relaciones (C3.27) y (C3.28) nos dan:

$$V^* = 1 - \sqrt{\epsilon y^*} ; \quad \theta_0 = -\sqrt{\epsilon} + y^{*1/2}$$

Esto nos indica que en las proximidades del punto crítico podemos escribir:

$$P = \epsilon y_c ; \quad V = 1 - \sqrt{\epsilon} n ; \quad \theta_0 = -\sqrt{\epsilon} + \alpha$$

Introduciendo estos desarrollos en la ecuación (C3.38), obtenemos:

$$\frac{dy_c}{dn} = 2\sqrt{\epsilon} \frac{y_c}{n} \left[ \frac{n^3 + jan^2 - y_c(n+j\alpha)}{(i+1)y_c - n^2 - jan} \right] \quad (C5.2.1)$$

con la condición de que en  $n=\alpha$  sea  $y_c = \alpha^2$  (punto crítico).

A la vista de la ecuación (C5.2.1) hacemos:

$$y_c = y_{0c} + \sqrt{\epsilon} y_{1c} ; \quad \alpha = \alpha_0 + \sqrt{\epsilon} \alpha_1 \quad (C5.2.2)$$

Con estos desarrollos, la ecuación (C5.2.1) y la condición de contorno, nos proporcionan:

$$\frac{dy_{0c}}{dn} = 0 \quad \text{con la condición} \quad n = \alpha_0 ; \quad y_{0c} = \alpha_0^2$$

$$\frac{dy_{1c}}{dn} = \frac{2y_{0c}}{n} \left[ \frac{n^3 + j\alpha_0 n^2 - y_{0c}(n+j\alpha_0)}{(j+1)y_{0c} - n^2 - j\alpha_0 n} \right] \quad (C5.2.3)$$

Con la condición  $n = \alpha_0$ ,  $y_{1c} = 2\alpha_0\alpha_1$

Puesto que  $y_{0c} = \text{constante} = \alpha_0^2$ , la ecuación (C5.2.3) se puede escribir:

$$\frac{dy_{1c}}{dn} = -2\alpha_0^2 \left[ 1 + \frac{j\alpha_0}{j+1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n + (j+1)\alpha_0} \right) \right]$$

con  $y_{1c} = 2\alpha_0\alpha_1$ , en  $n = \alpha_0$ .

La solución de esta ecuación es:

$$y_{1c} = 2\alpha_0 \left\{ -\alpha_0 n + \alpha_1 + \alpha_0^2 - \frac{j\alpha_0^2}{j+1} \left[ \ln \frac{(j+2)n}{n + \alpha_0(j+1)} \right] \right\}$$

y la solución total es:

$$y_c = \alpha_0 \left\{ \alpha_0 + 2\sqrt{\epsilon} \left[ -\alpha_0 \eta + \alpha_1 + \alpha_0^2 - \frac{j\alpha_0^2}{j+1} \ln \left\{ \frac{(j+2)\eta}{\eta + \alpha_0(j+1)} \right\} \right] \right\} \quad (C5.2.4)$$

Cuando nos acercamos a la onda de choque  $\eta \rightarrow 0 + 0(\sqrt{\epsilon})$ , por lo tanto  $y_c \rightarrow -\infty$  (se comporta como  $\ln \eta$  cuando  $\eta \rightarrow 0$ ). Para determinar  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  vamos a obtener una solución válida en las proximidades de  $\eta=0$  (en las proximidades de la onda de choque). Acoplando la solución (C5.2.4) con la que obtengamos a continuación, obtendremos los valores de  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ .

En la onda de choque las relaciones (C3.36) y (C3.37) nos dan:

$$P_s \rightarrow \frac{1}{2} \epsilon + 0(\epsilon^2)$$

$$V_s \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \epsilon + 0(\epsilon^2)$$

esto nos permite escribir en las proximidades de la onda de choque:

$$P = \epsilon y_s$$

$$V = 1 - \epsilon x$$

$$\theta_0 = -j\sqrt{\epsilon} \alpha$$

Introduciendo estos desarrollos en la ecuación (C3.38) obtenemos:

$$\frac{dy_s}{dx} = -2\sqrt{\epsilon} \frac{j\alpha}{j+1} \frac{y_s}{x}$$

$$\text{con la condición } y_s = \frac{1}{2} + 0(\epsilon) \text{ en } x = \frac{1}{2}.$$

A la vista de esta ecuación vamos a hacer como antes:

$$y_s = y_{s0} + \sqrt{\epsilon} y_{s1}$$

$$\alpha = \alpha_0 + \sqrt{\epsilon} \alpha_1$$

con lo que nos queda:

$$\frac{dy_{s0}}{dx} = 0; \quad \text{con } y_{s0} = \frac{1}{2} \quad \text{en } x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy_{s1}}{dx} = -2 \frac{j\alpha_0}{j+1} \frac{y_{s0}}{x}; \quad \text{con } y_{s1} = 0 \quad \text{en } x = \frac{1}{2}$$

La solución de la primera ecuación nos dá:

$$y_{s0} = \frac{1}{2}$$

y la de la segunda:

$$y_{s1} = - \frac{\alpha_0^j}{j+1} \ln(2x)$$

Nos queda entonces:

$$y_s = \frac{1}{2} - \sqrt{\epsilon} \frac{\alpha_0^j}{j+1} \ln(2x) \quad (C5.2.5)$$

Para acoplar la solución (C5.2.4) con (C5.2.5) hemos de irnos a valores pequeños de  $\eta$  ( $\sim \sqrt{\epsilon}$ ) con la ecuación (C5.2.4) y a valores grandes de  $x$  ( $\sim 1/\sqrt{\epsilon}$ ) con la ecuación (C5.2.5). En esta zona intermedia ambas soluciones han de coincidir, lo cual nos permitirá obtener los valores de  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ .

El desarrollo (C5.2.4) para valores de  $\eta \rightarrow \sqrt{\epsilon} \cdot x$  queda:

$$y_c \rightarrow \alpha_0^2 + \sqrt{\epsilon} \{ 2\alpha_0\alpha_1 + 2\alpha_0^3 - \frac{2j\alpha_0^3}{j+1} \ln \frac{(j+2)\sqrt{\epsilon}}{(j+1)\alpha_0} \} - \sqrt{\epsilon} \frac{2j\alpha_0^3}{j+1} \ln x + O(\epsilon)$$

mientras que el desarrollo (C5.2.5) queda:

$$y_s \rightarrow \frac{1}{2} - \sqrt{\epsilon} \frac{\alpha_0^j}{j+1} \ln 2 - \sqrt{\epsilon} \frac{\alpha_0^j}{j+1} \ln x + O(\epsilon)$$

Al identificar términos de orden unidad obtenemos:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

con lo que las soluciones quedan:

$$y_c \rightarrow \frac{1}{2} + \sqrt{\epsilon} \{ \sqrt{2} \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{j}{j+1} \ln \frac{(j+2)\sqrt{2\epsilon}}{j+1} \} - \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}} \frac{j}{j+1} \ln x + O(\epsilon)$$

$$y_s \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}} \frac{j}{j+1} \ln 2 - \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}} \frac{j}{j+1} \ln x + O(\epsilon)$$

Vemos que los términos en  $\ln x$  se identifican en ambos desarrollos y para que se identifique el término constante ha de ocurrir que:

$$\alpha_1 = - \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{j}{j+1} \ln \frac{(j+2)\sqrt{\epsilon}}{(j+1)\sqrt{2}} \right\}$$



con lo cual obtenemos:

$$\theta_0 = -\sqrt{\epsilon} j \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \left[ 1 + \frac{j}{j+1} \ln \frac{(j+1)\sqrt{2}}{(j+2)\sqrt{\epsilon}} \right] \right\} \quad (C5.2.6)$$

y la solución en torno al punto crítico queda:

$$y_c = \frac{1}{2} - \sqrt{\epsilon} \left[ n + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{j}{j+1} \ln \frac{\sqrt{2}(j+1)n}{\sqrt{\epsilon}(n + \frac{j+1}{\sqrt{2}})} \right] \quad (C5.2.7)$$

La solución (C5.2.7) en torno al punto crítico no es válida para  $n \sim 1/\sqrt{\epsilon}$  ya que los dos términos, el de orden unidad y el de orden  $\sqrt{\epsilon}$ , se hacen del mismo orden y el desarrollo no es convergente. Puesto que  $n \sim 1/\sqrt{\epsilon}$  significa  $1-V$  de orden unidad, vamos a ver en que se convierte la ecuación (C3.38) para  $V-1$  de orden unidad y  $P \sim \epsilon$  y  $\theta_0 \sim \sqrt{\epsilon}$  como anteriormente.

Haciendo:  $P = \epsilon y_p$

$$\theta_0 = -\sqrt{\epsilon} j \alpha_0$$

$$V-1 \text{ de orden unidad}$$

la ecuación (C3.38) queda:

$$\frac{dy_p}{dV} = \frac{2y_p}{V} ; \quad y_p = MV^2$$

Para calcular la constante  $M$  hemos de acoplar con la solución en torno al punto crítico.

$$\text{Para } V \rightarrow 1 - \sqrt{\epsilon} n$$

$$y_p \rightarrow M - 2\sqrt{\epsilon} n M$$

Dado que  $M$  puede ser una constante con términos de orden unidad y de orden  $\sqrt{\epsilon}$  pondremos:  $M = M_0 + \sqrt{\epsilon} M_1$  con lo que tenemos:

$$y_p \rightarrow M_0 + \sqrt{\epsilon}(M_1 - 2M_0 n)$$

La solución en torno al punto crítico, para  $n$  grandes queda:

$$y_c \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}} \frac{j}{j+1} \ln \left[ \frac{\sqrt{2}(1+j)}{\sqrt{\epsilon}} \right] - \sqrt{\epsilon} n$$

acoplando ambas soluciones tenemos:

$$M_0 = \frac{1}{2}$$

$$M_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{j}{j+1} \ln \left[ \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} (j+1) \right]$$

La solución queda:

$$y_p = \left\{ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \frac{j}{j+1} \ln \left[ \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} (j+1) \right] \right\} v^2 \quad (C5.2.8)$$

Resumiendo tenemos:

a) Proximidades de la onda de choque incluyendo al punto crítico

$$P = \frac{\epsilon}{2} \left\{ 1 - 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \left[ \sqrt{2} n + \frac{j}{j+1} \ln \left\langle \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{(1+j)n}{n + \frac{j+1}{\sqrt{2}}} \right\rangle \right] \right\} \quad (C5.2.9)$$

con  $\eta = \frac{1-V}{\sqrt{\epsilon}}$  y la onda de choque está situada en  $\eta = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$ .

b) Solución válida para  $1-V$  de orden unidad:

$$P = \frac{\epsilon}{2} \left\{ 1 - 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \frac{j}{j+1} \ln \left[ \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} (j+1) \right] \right\} v^2 \quad (C5.2.10)$$

c) Autovalor  $\theta_0$

$$\theta_0 = -j \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \left[ 1 + \frac{j}{j+1} \ln \left\langle \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{j+1}{j+2} \right\rangle \right] \right\} \quad (C5.2.11)$$

Una vez que hemos obtenido el valor de  $P$  como función de  $V$ , vamos a obtener el valor de  $R$  para lo cual utilizaremos la ecuación diferencial (C3.39) con los resultados obtenidos de la (C3.38).

Cuando nos encontramos en las proximidades del punto crítico teníamos:

$$V = 1 - \sqrt{\epsilon} \eta$$

$$P = \frac{1}{2} \epsilon + O(\epsilon\sqrt{\epsilon})$$

$$\theta_0 = -\sqrt{\epsilon} \frac{j}{\sqrt{2}} + O(\epsilon\sqrt{\epsilon})$$

Con estos valores, la ecuación diferencial (C3.39) queda:

$$\frac{dR_c}{d\eta} = \frac{j(\eta - 1/\sqrt{2})}{\eta^2 + \frac{j}{\sqrt{2}} \eta - \frac{j+1}{2}}$$

Como en el caso anterior el numerador y denominador de esta ecuación se anulan simultáneamente en  $\eta = 1/\sqrt{2}$ , por lo que podemos escribir:

$$\frac{dR_c}{d\eta} = \frac{j}{\eta + \frac{j+1}{\sqrt{2}}}$$

$$R_c = j \ln \left\{ B \left( \eta + \frac{j+1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Como en la onda de choque es  $\eta = 0 + O(\sqrt{\epsilon})$  y  $R_c = \ln \left( \frac{2}{\epsilon} \right) + O(\epsilon)$  tenemos:

$$B = \left( \frac{2}{\epsilon} \right)^j \frac{\sqrt{2}}{j+1}$$

con lo que la solución queda:

$$R_c = \ln \left( \frac{2}{\epsilon} \right) + j \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{j+1} \eta \right)$$

Esta solución es válida desde la onda de choque hasta el punto crítico incluyendo a este.

Cuando nos acercamos hacia los valores pequeños de  $V$ , es decir,  $\eta$  grandes la solución anterior no es válida puesto que los dos términos anteriores se hacen del mismo orden; es decir, el primer sumando es del orden de  $\ln \epsilon$  y el segundo de orden unidad para  $\eta$  de orden unidad, pero para  $\eta \rightarrow 1/\sqrt{\epsilon}$  este sumando nos queda de orden  $\ln \epsilon$ , tan importante como el primero, por lo tanto la solución no es válida para  $\eta \rightarrow 1/\sqrt{\epsilon}$ . Dado que  $\eta \rightarrow 1/\sqrt{\epsilon}$  significa  $1-V$  de orden unidad, vamos a escribir la ecuación diferencial (C3.39) para  $1-V$  de orden unidad,  $P \sim \epsilon$  y  $\theta_0 \sim \sqrt{\epsilon}$ . Nos queda:

$$\frac{dR_p}{dV} = \frac{j}{V-1}$$

$$R_p = R_\infty + j \ln(1-V)$$

Para obtener el valor de  $R_\infty$ , acoplamos esta solución con la obtenida anteriormente y tenemos:

$$V \rightarrow 1 - \sqrt{\epsilon} \eta$$

$$R_D \rightarrow R_\infty + \frac{j}{2} \ln \epsilon + j \ln \eta$$

mientras que acercándonos con la solución en torno al punto crítico hasta valores grandes de  $\eta$  nos queda:

$$R_C \rightarrow \ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right) + j \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{j+1}\right) + j \ln \eta$$

identificando términos tenemos:

$$R_\infty = -\frac{2+j}{2} \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) - j \ln(j+1)$$

Es decir:

- a) Solución válida cerca de la onda de choque, incluyendo al punto crítico

$$R = \ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right) + j \ln\left(1 + \frac{\sqrt{2} \eta}{j+1}\right); \quad \eta = \frac{1-V}{\sqrt{\epsilon}} \sim 0(1) \quad (C5.2.12)$$

- b) Solución válida para  $(1-V) \sim 0(1)$

$$R = -\frac{2+j}{2} \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + j \ln\left(\frac{1-V}{1+j}\right) \quad (C5.2.13)$$

A continuación vamos a calcular el valor de  $Z = Z(V)$ , procediendo en forma análoga a los casos de P y R.

En las proximidades del punto crítico, la ecuación (C3.26) con  $P=\epsilon/2$ ;  $V=1-\sqrt{\epsilon}\eta$ ;  $\theta_0=-j\sqrt{\epsilon/2}$  nos queda:

$$\frac{dZ_c}{d\eta} = \sqrt{\epsilon} \left( 1 - \frac{j/\sqrt{2}}{\eta + \frac{j+1}{\sqrt{2}}} \right)$$

La solución de esta ecuación, con la condición de que en la onda de choque ( $\eta=0+0(\sqrt{\epsilon})$ ) sea  $Z_c=0$ , nos da:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \left[ \sqrt{2} \eta - j \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{2} \eta}{j+1} \right) \right]$$

Esta solución deja de ser válida para  $\eta \sim 1/\sqrt{\epsilon}$ . Para  $1-V$  de orden unidad la ecuación (3.19) nos queda:

$$\frac{dZ_p}{dV} = - \left( 1 - j\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \right) \frac{1}{V} + j\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{1-V}$$

En esta ecuación hemos retenido términos de orden  $\sqrt{\epsilon}$  porque lo necesitamos para poder hacer el acoplamiento. La solución de esta ecuación es:

$$Z_p = Z_\infty - \left( 1 - j\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \right) \ln V - j\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \ln(1-V)$$

Acoplando esta solución con la anterior obtenemos:

$$Z_\infty = + j\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \ln \left[ \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} (j+1) \right]$$

Resumiendo nos queda:

- a) Solución válida en las proximidades de la onda de choque incluyendo al punto crítico;

$$Z = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \left[ \sqrt{2} \eta - j \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{2} \eta}{j+1} \right) \right] ; \quad \eta = \frac{1-V}{\sqrt{\epsilon}} \sim 0(1) \quad (C5.2.14)$$

- b) Solución válida para  $(1-V) \sim 0(1)$

$$Z = -(1 - j\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}) \ln V - j\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \ln \left( \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{1-V}{j+1} \right) \quad (C5.2.15)$$

Hasta ahora no hemos utilizado la ecuación algébrica (C3.40). Esta ecuación queda reducida a:

$$\ln P + \frac{2j}{j+1} \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} R + \frac{2j}{j+1} \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \ln(1-V) + 2(1 + j\sqrt{\frac{\epsilon}{2}})Z = \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \quad (C4.2.16)$$

Esta ecuación nos sirve para comprobar los resultados obtenidos. Si inroducimos las soluciones (C5.2.9), (C5.2.12) y (C5.2.14) en la ecuación (C5.2.16) se cumple idénticamente. Lo mismo ocurre si introducimos las soluciones (C5.2.10), (C5.2.13) y (C5.2.15) en la ecuación (C5.2.16).

La ecuación (C5.2.16), particularizada para  $V=0$  queda:

$$\ln M + \frac{2j}{j+1} \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} R_{\infty} + 2(1 + j\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}) Z_{\infty} = \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \quad (C5.2.17)$$

Si sustituimos los valores obtenidos de  $M$ ,  $R_{\infty}$  y  $Z_{\infty}$  en la ecuación (C5.2.17) también se satisface idénticamente.

A la hora de representar gráficamente las soluciones obtenidas hemos construido una solución uniformemente válida para todo  $V$  sumando las soluciones válidas en cada zona y restándole los términos comunes. A continuación damos la solución uniformemente válida para  $R$  y  $Z$ , obteniendo el valor correspondiente de  $P$  de la ecuación (C5.2.16).

$$R = -\ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + j \ln \left[ 1 + \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{1-V}{1+j} \right] \quad (C5.2.18)$$

$$Z = -\left(1 - j\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\right) \ln V - j\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \ln \left[ 1 + \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{1-V}{1+j} \right] \quad (C5.2.19)$$

Los valores de  $R_{\infty}$  y  $Z_{\infty}$  los obtenemos de estas ecuaciones y son:

$$R_{\infty} = -\ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + j \ln \left[ 1 + \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{1}{1+j} \right] \quad (C5.2.19)$$

$$Z_{\infty} = -j\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \ln \left[ 1 + \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \frac{1}{1+j} \right] \quad (C5.2.20)$$

Las relaciones (C5.2.19) y (C5.2.20) difieren ligeramente de las obtenidas anteriormente y coinciden con ellas si las desarrollamos para  $\epsilon \rightarrow 0$ . Utilizaremos estas expresiones, pues (C5.2.19) y (C5.2.20) dan una aproximación mejor que sus desarrollos. El valor de  $M$  se obtiene con ayuda de la ecuación (C5.2.17) y las ecuaciones (C5.2.19) y (C5.2.20).

En la Fig. C04 se ha representado el autovalor  $\theta_0$  como función de  $\gamma$ , dado por (C5.2.11). Como comparación se han representado en el mismo gráfico los valores de  $\theta_0$  obtenidos mediante la integración numérica (C3.38) para  $\gamma=1.2$  y  $\gamma=1.4$  (Welsh, R.L.; 1967).

En las Figs. C05, C06 y C07 se han representado los valores de  $R_{\infty}$  (C5.2.19),  $Z_{\infty}$  (C5.2.20) y  $M$  (C5.2.17) como función de  $\gamma$ , respectivamente.



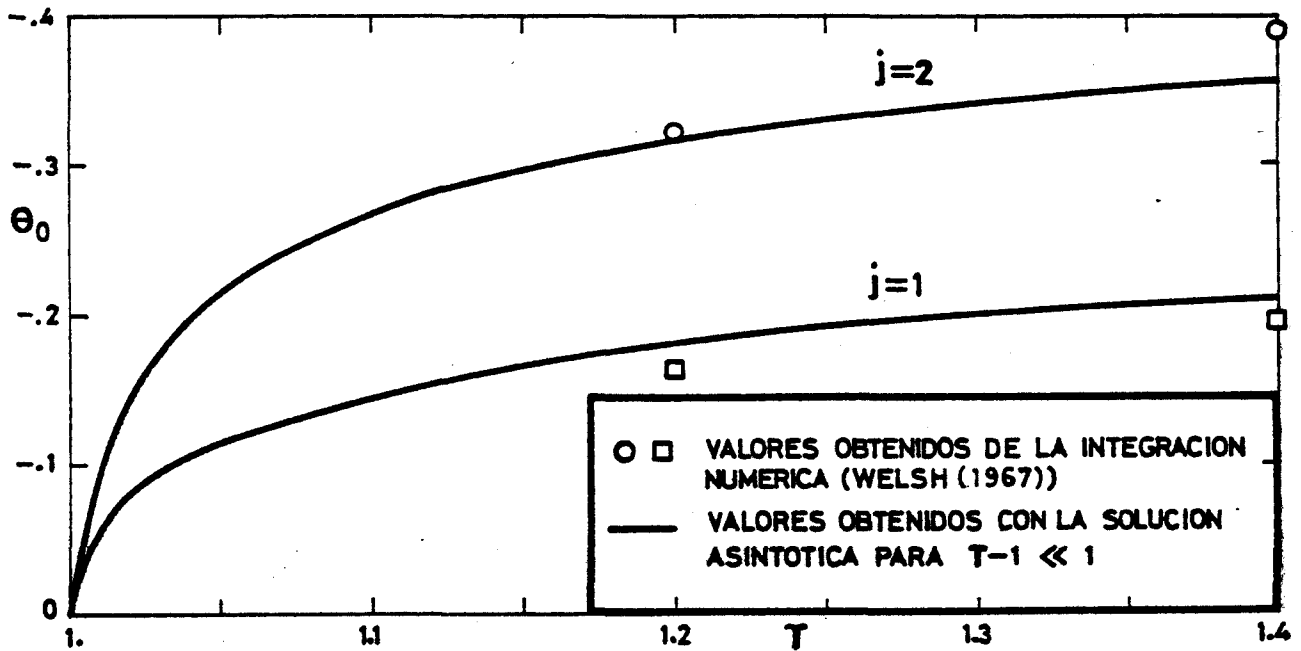


Fig. C04.- Autovalor  $\theta_0$  como función de la relación de calores específicos  $\gamma$ , en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ). Solución asintótica para valores de  $\gamma$  próximos a la unidad.

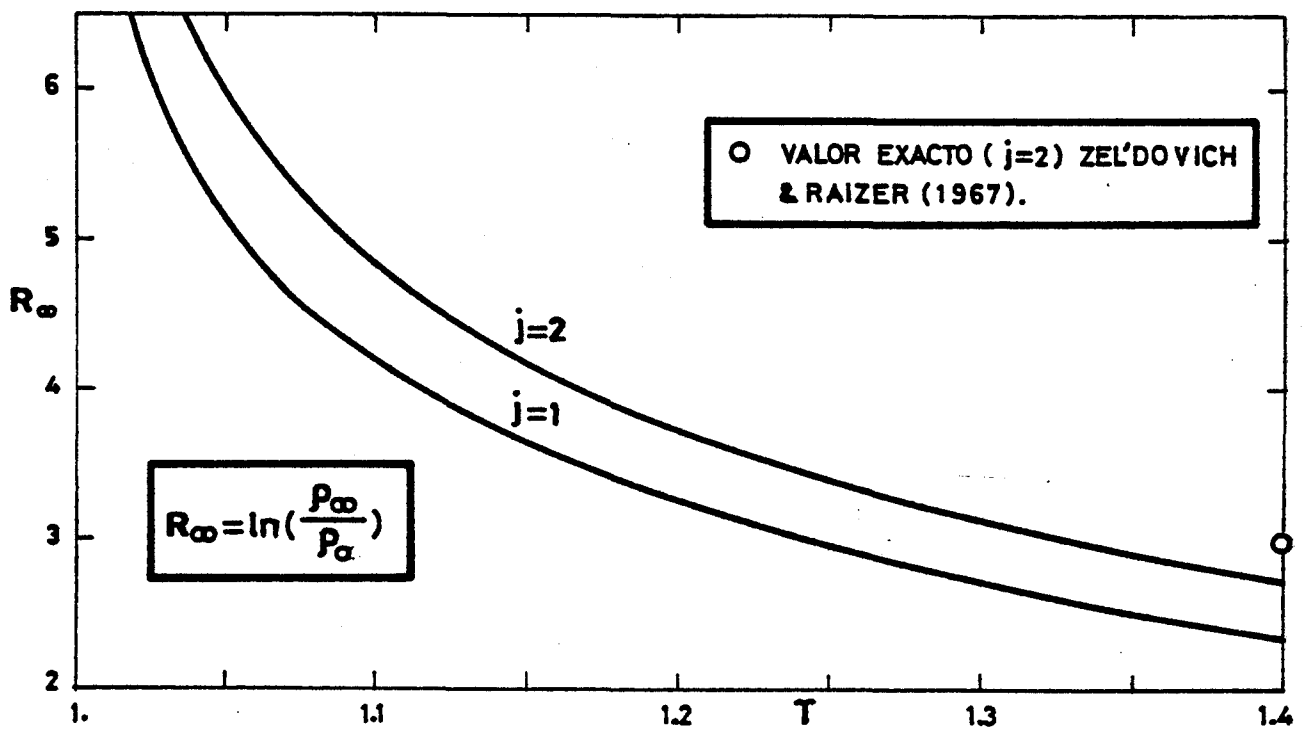


Fig. C05.- Cociente de densidades ( $\rho_\infty/\rho_0 = \exp(R_\infty)$ ) como función de la relación de calores específicos  $\gamma$ , en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ). Solución asintótica para valores de  $\gamma$  próximos a la unidad.

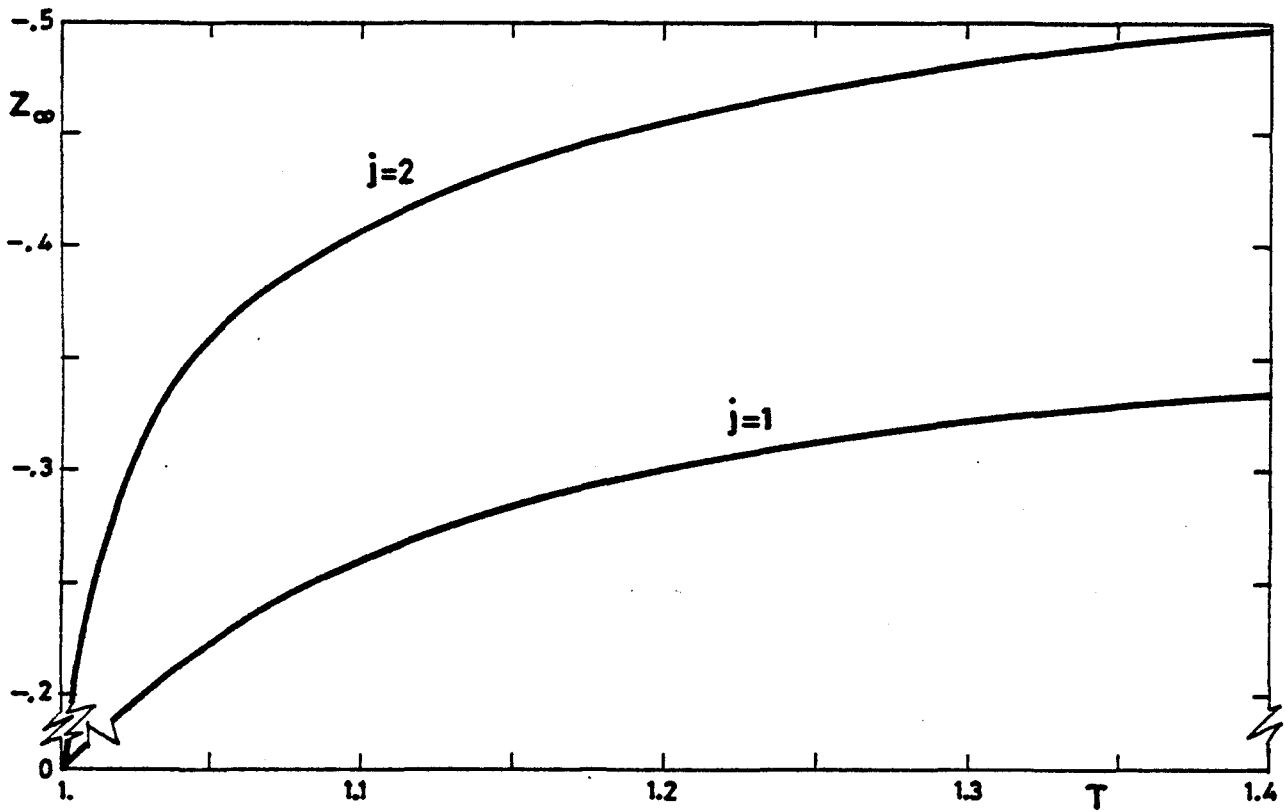


Fig. C06.-  $Z_\infty$  como función de la relación de calores específicos  $\gamma$ , en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ). Solución asintótica para valores de  $\gamma$  próximos a la unidad.

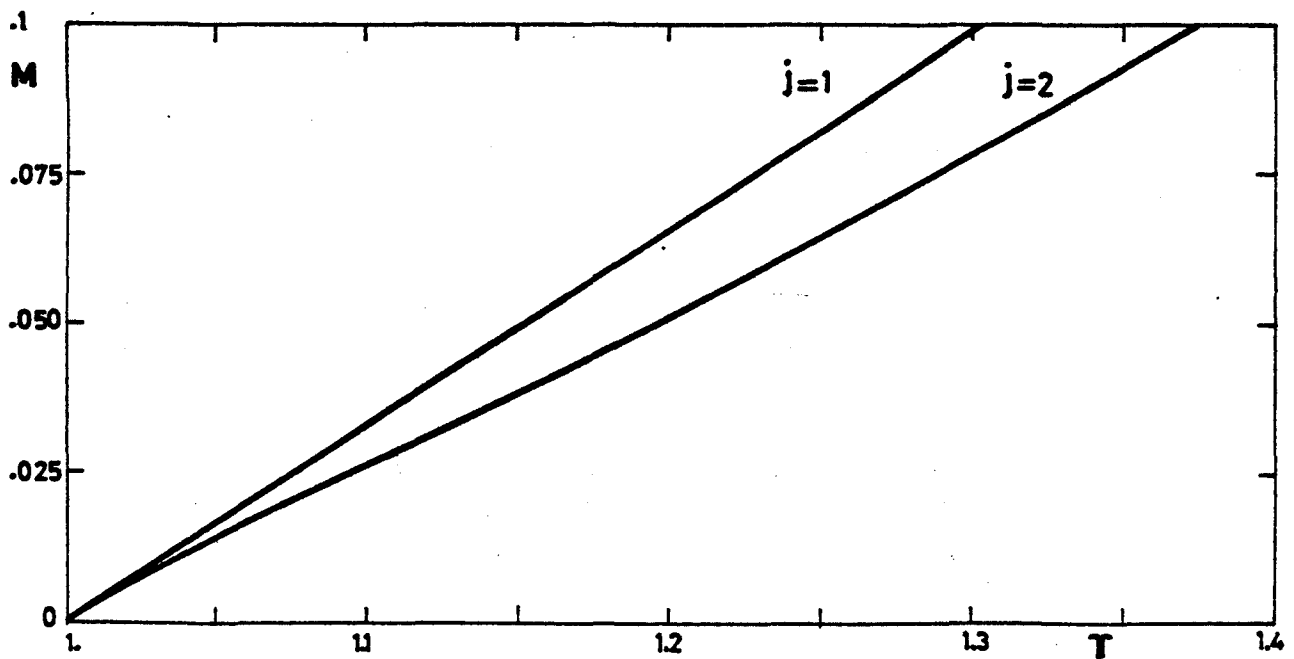


Fig. C07.-  $M$  como función de la relación de calores específicos  $\gamma$ , en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ). Solución asintótica para valores de  $\gamma$  próximos a la unidad.

En la Fig. C05 se ha representado también el valor de  $R_{\infty}$  correspondiente a  $\gamma=1.4$  y  $j=2$ , obtenido por integración numérica de las ecuaciones. (Zel'dovich, Ya. y Raizer, Yu. P.; 1967).

En las Figs. C08, C09 y C10 se han representado las funciones  $P(V)$ ,  $R(V)$  y  $Z(V)$  para distintos valores de  $\gamma$ . Estas curvas han sido representadas con ayuda de las ecuaciones (C5.2.16), (C5.2.18) y (C5.2.19).

## 6.- PUNTOS CRITICOS.

Los puntos críticos, donde se anulan simultáneamente numerador y denominador de la ecuación (C3.38), son:

$$\text{- El origen,} \quad V=0; \quad P=0 \quad (C6.1)$$

$$\text{- Los puntos} \quad V=1; \quad P=0; \quad V=1-\theta_0; \quad P=0 \quad (C6.2)$$

- Los puntos de coordenadas  $(V,P)$  dados por las raíces de la ecuación:

$$(V-V_1^*)(V-V_2^*)(V-V_3) = 0 \quad (C6.3)$$

junto con

$$P = \frac{V(V-1)(V-1+\theta_0)}{\gamma(j+1)V+2\theta_0} \quad (C6.4)$$

Las raíces de (C6.3) y sus correspondientes valores de (C6.4) son:

$$\left. \begin{aligned} V_{1,2}^* &= \frac{j\gamma + \theta_0(\gamma-2) \pm \sqrt{\{j\gamma + \theta_0(\gamma-2)\}^2 + 8\theta_0 j\gamma}}{2j\gamma} \\ P_{1,2}^* &= \frac{(V_{1,2}^* - 1)^2}{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (C6.5)$$

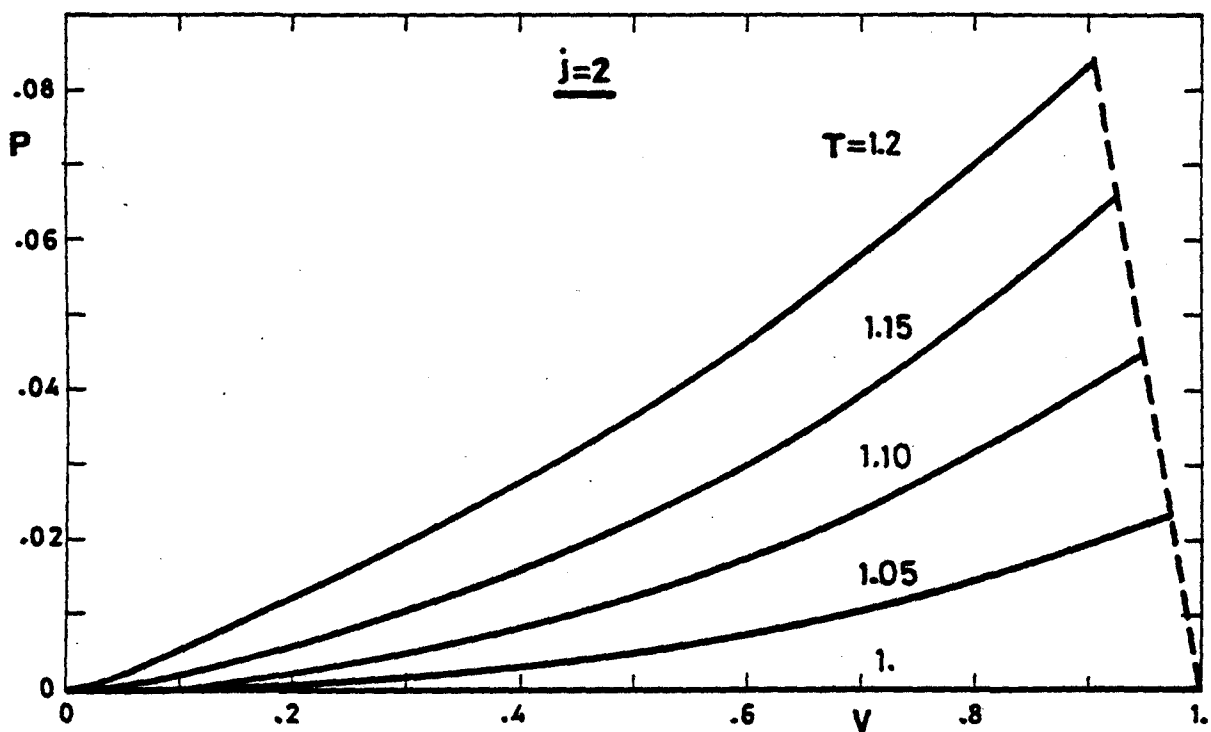
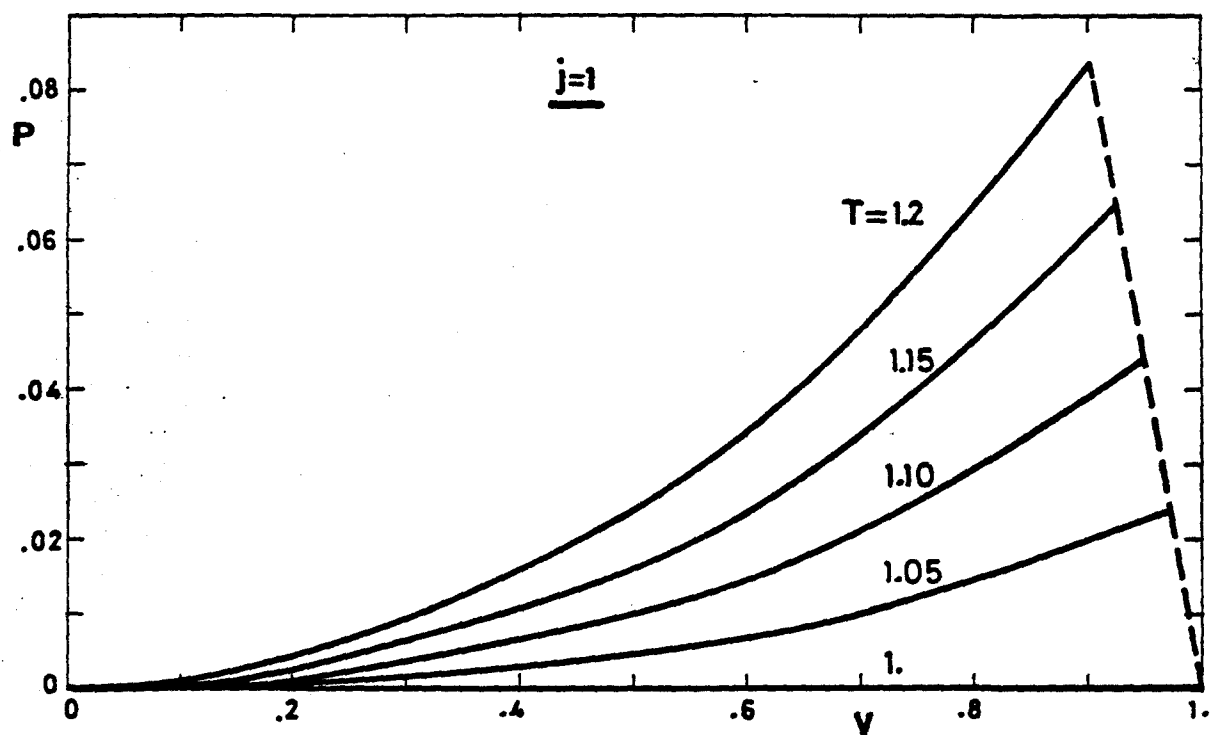


Fig. C08.-  $P$  como función de  $V$  para distintos valores de la relación de calores específicos  $\gamma$ , en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ). Las líneas de trazos representan la posición de la onda de choque en el plano  $V$ - $P$ . Solución asintótica para valores de  $\gamma$  próximos a la unidad.

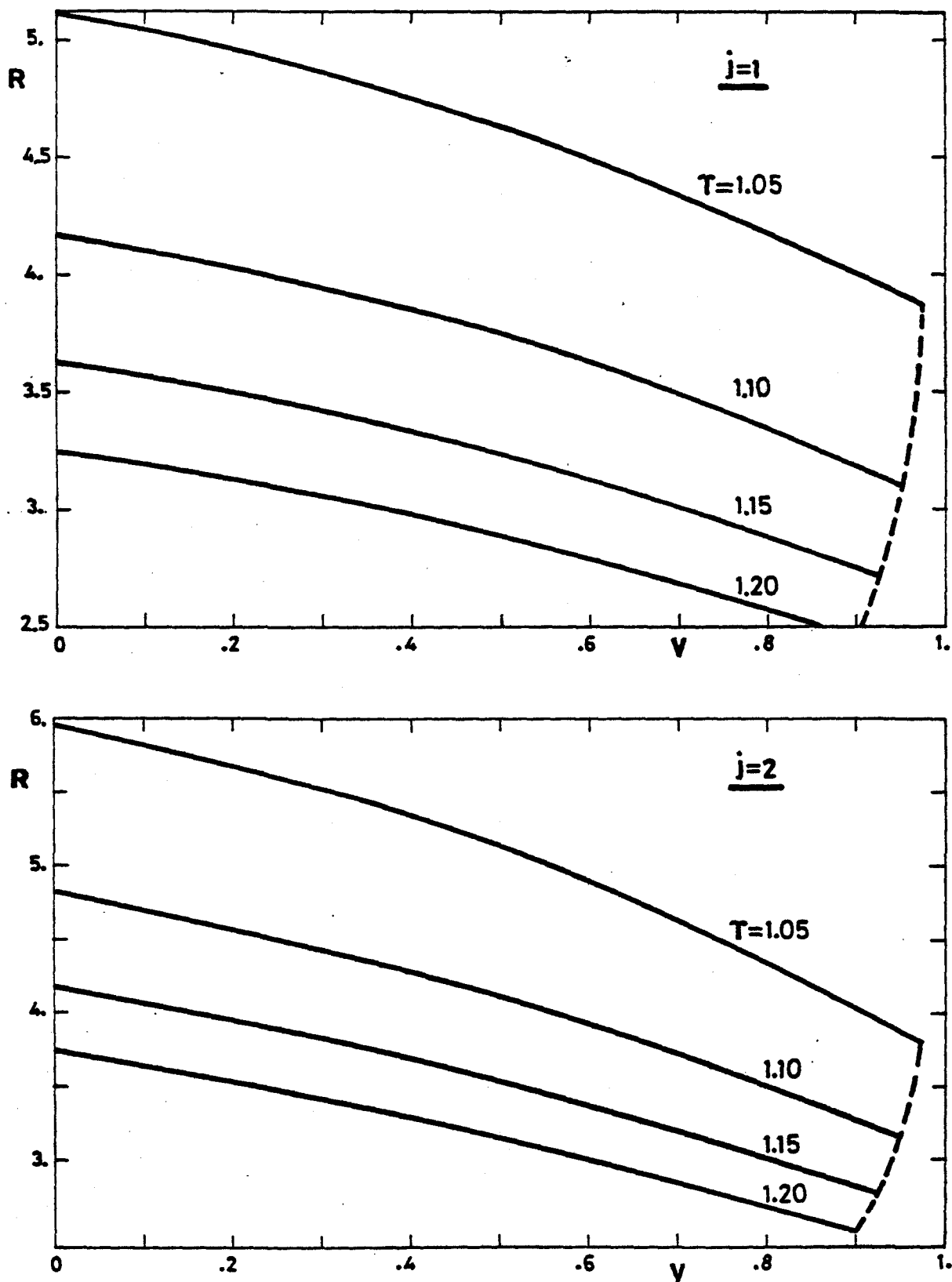


Fig. C09.-  $R$  como función de  $V$  para distintos valores de la relación de calores específicos  $\gamma$ , en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ). Las líneas de trazos representan la posición de la onda de choque en el plano  $V$ - $R$ . Solución asintótica para valores de  $\gamma$  próximos a la unidad.

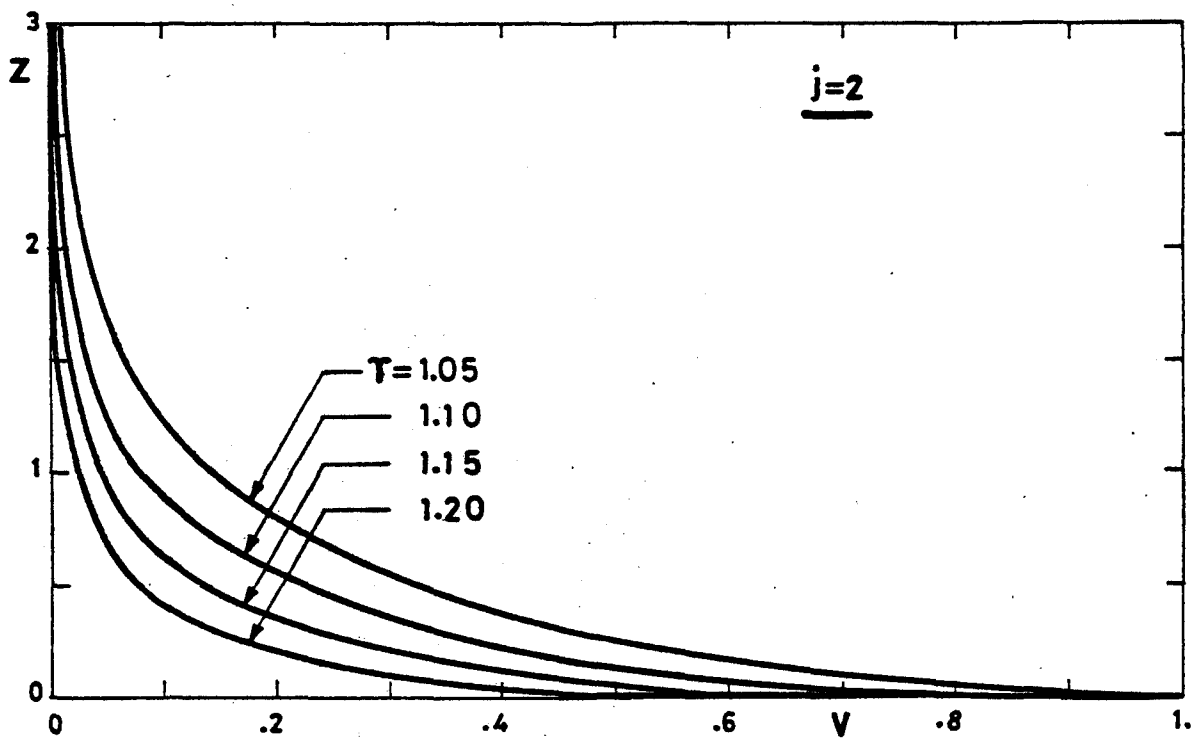
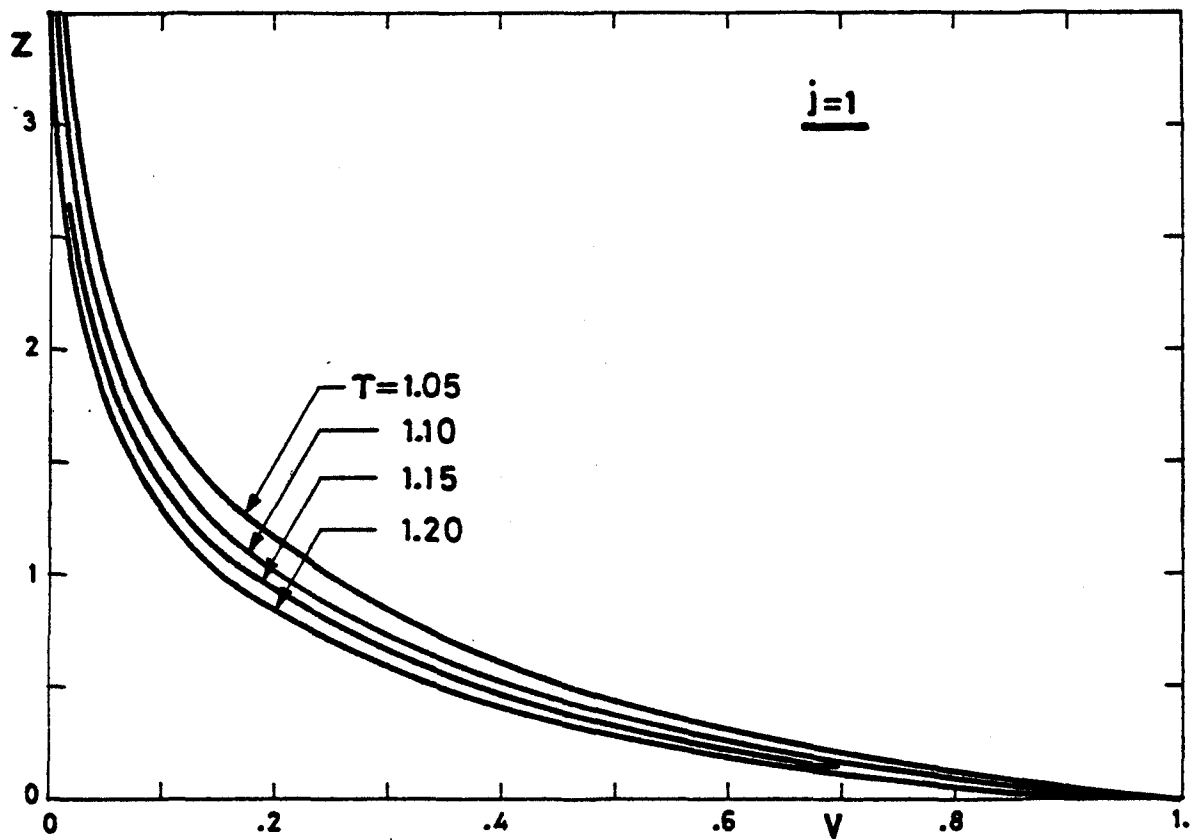


Fig. C10.-  $Z$  como función de  $V$  para distintos valores de la relación de calores específicos  $\gamma$ , en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ). Solución asintótica para valores de  $\gamma$  próximos a la unidad.

$$V_3 = \frac{2(1-\theta_0)}{j(\gamma-1)+(\gamma+1)} ; P_3 = \frac{V_3(V_3-1)(V_3-1+\theta_0)}{\gamma(j+1)V_3+2\theta_0} \quad (C6.6)$$

La solución de (C3.38) ha de pasar por uno de los dos puntos críticos dados por (C6.5). Este punto lo designaremos siempre por  $(V_1^*, P_1^*)$ , independientemente de que corresponda al signo más o al signo menos de (C6.5).

La solución de (C3.38) no pasará por los puntos críticos  $V=1, P=0$ ;  $V=1-\theta_0, P=0$ , puesto que el valor máximo de  $V$  se alcanza en la onda ( $V=V_s = 2/(\gamma+1)$ ). Dado que  $\gamma$  es siempre mayor que la unidad y  $\theta_0 < 0$ , nunca se alcanza  $V=1$  y por lo tanto nos desprecupamos de este punto.

En el entorno de los otros cuatro puntos críticos (C6.1), (C6.5) y (C6.6), la ecuación (C3.38) toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + ey} \quad (C6.7)$$

siendo  $y=P-P_c$ ;  $x=V-V_c$ ;  $V_c$  y  $P_c$  representan los valores de  $V$  y  $P$  en cada uno de los puntos críticos. Los coeficientes valen:

$$a = 2\gamma P_c^2 + \theta_0 P_c \{2(\gamma-3)V_c - +5 - P_c(V_c-1) \{ [2+(\gamma-1)j] (3V_c-1)-4 \} \} \quad (C6.8)$$

$$b = 2P_c \{ \gamma(V_c-1) + \theta_0 \} \quad (C6.9)$$

$$c = (V_c-1) \{ \gamma(j+1)P_c - (V_c-1)(3V_c-1) - \theta_0(2V_c-1) \} \quad (C6.10)$$

$$e = (V_c-1) \{ \gamma(j+1)V_c + 2\theta_0 \} \quad (C6.11)$$

Para el punto crítico situado en el origen no son válidas estas expresiones. Sus valores se darán a continuación.

Dependiendo del valor de los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $e$ , el punto crítico puede ser un foco, centro, nodo, puerto o punto regular. En nuestro caso se cumple siempre que  $(b-c)^2 + 4ae > 0$  (lo contrario implicaría la no existencia de la pendiente en el punto crítico, véase (C4.2)). Entonces el punto crítico será un puerto, si además  $ae - bc > 0$ ; un nodo estable si  $ae - bc < 0$  y  $b+c < 0$ ; un nodo inestable si  $ae - bc < 0$  y  $b+c > 0$ ; y un punto regular si  $ae - bc = 0$ . Los índices de Poincaré de cada uno de los puntos críticos son: puerto  $i=-1$ ; nodo  $i=+1$ ; punto regular  $i=0$ .

a) Proximidades del origen:  $V_c=0$ ,  $P_c=0$ .  
 ----- $\frac{c}{c}$ -----

En este caso los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $e$  no se pueden obtener directamente de las expresiones (C6.8) a (C6.11), que no son válidas cuando  $P_c=0$  ((C6.8) y (C6.9)) y  $V_c=1$  ((C6.10) y (C6.11)). Para  $V_c=0$  y  $P_c=0$  se obtiene:

$$a = 0; \quad b = 2(\theta_0 - 1); \quad c = \theta_0 - 1; \quad e = 2\theta_0 \quad (C6.12)$$

como  $(b-c)^2 + 4ae = (\theta_0 - 1)^2 > 0$

$$ae - bc = -2(\theta_0 - 1)^2 < 0$$

$$b+c = -3(1-\theta_0) < 0$$

el origen es un nodo estable.

De la ecuación (C4.2) se deduce:

$$\left( \frac{dP}{dV} \right)_{0,0} = \frac{(\theta_0 - 1) \pm (\theta_0 - 1)}{4\theta_0} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\theta_0 - 1}{2\theta_0} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (C6.13)$$



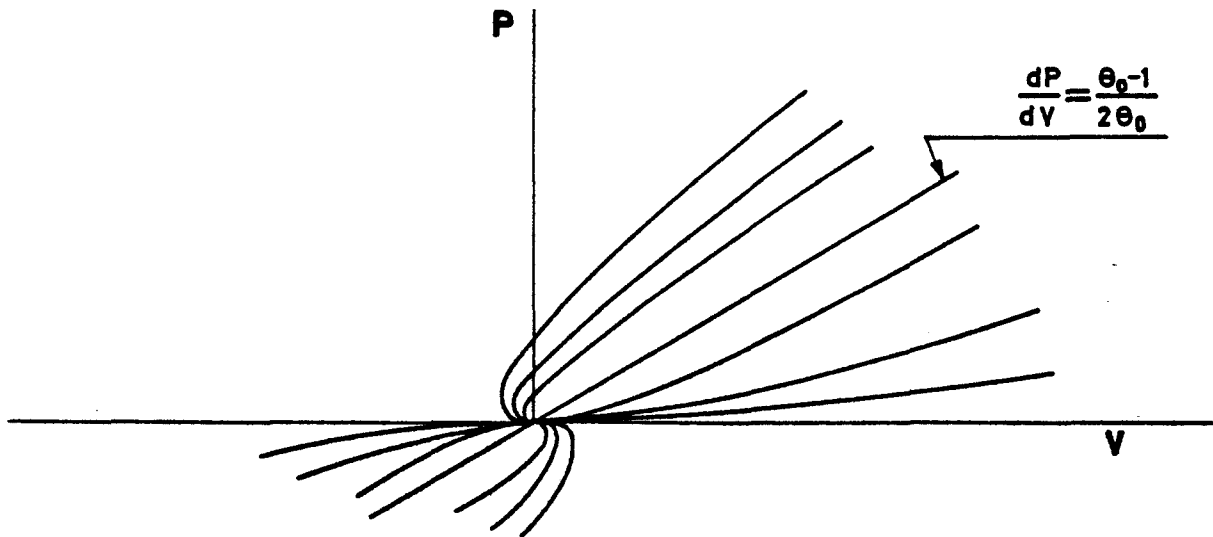


Fig. C11.- Esquema de la singularidad en el origen ( $V=0$ ,  $P=0$ ).

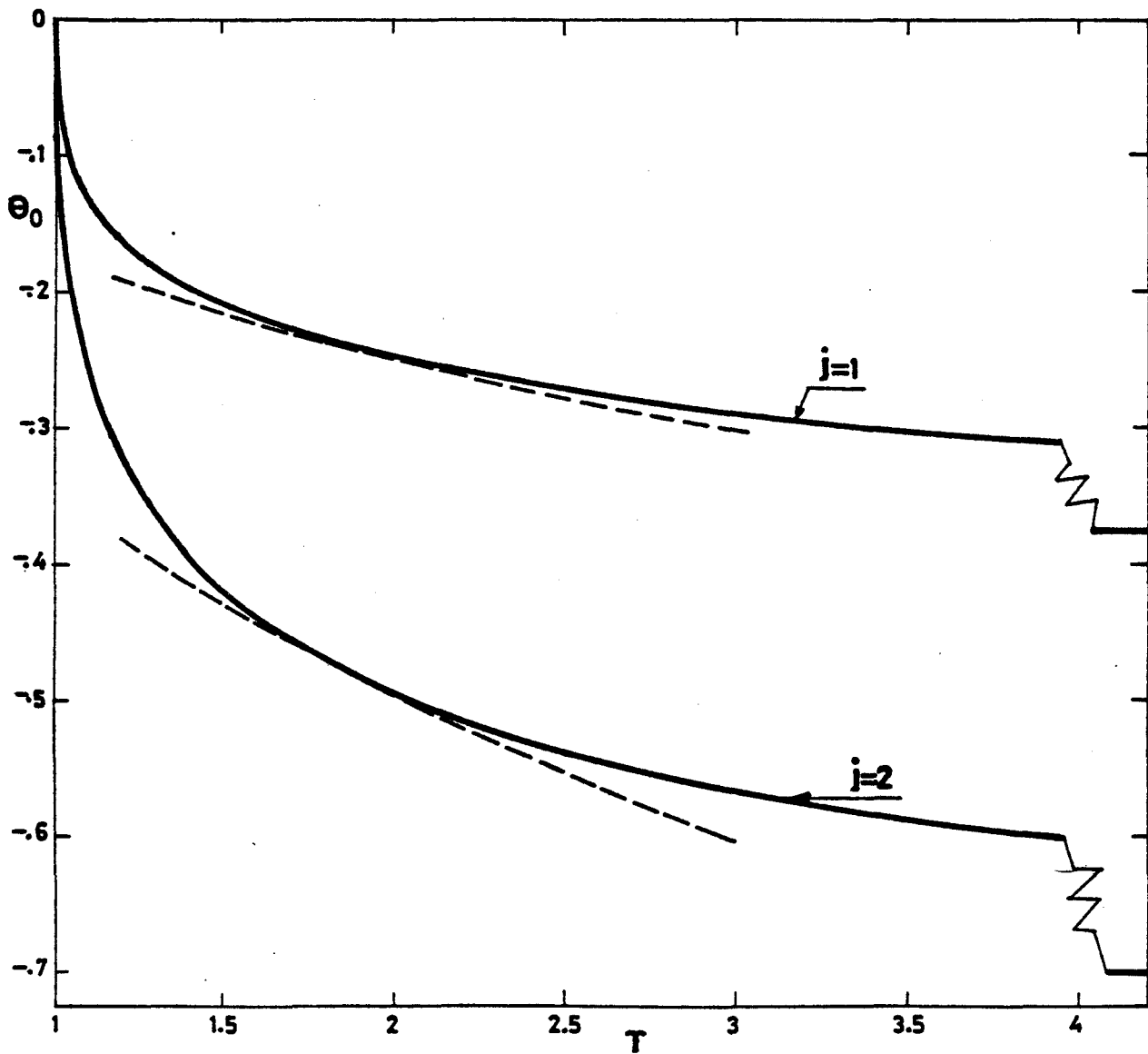


Fig. C12.- Autovalor  $\theta_0$  como función de la relación de calores específicos  $\gamma$ . Las líneas discontinuas representan  $\theta_0 = \theta_0(\gamma)$  obtenido de la ecuación (C6.24).

$$\rho(r,t) = \rho_{\infty} \exp \left\{ - \left[ (\theta_0 + j)/(1 - \theta_0) \right] \frac{C_u t}{r} \right\} \quad (C6.19)$$

$$p(r,t) = M \rho_{\infty} \left( \frac{C_u r^{\theta_0}}{1 - \theta_0} \right) \exp \left[ - \frac{(\gamma + 2)\theta_0 + j\gamma - 2\theta_0^2(1 + 2M)}{1 - \theta_0} \cdot \frac{C_u t}{r} \right] \quad (C6.20)$$

siendo

$$C_u = C \exp \{ (1 - \theta_0) Z_{\infty} \}; \quad \rho_{\infty} = \rho_0 \exp(R_{\infty})$$

b) Proximidades de los puntos  $(V_{1,2}^*, P_{1,2}^*)$  y  $(V_3, P_3)$ .  
-----

Los coeficientes (C6.8) a (C6.11), que determinan el tipo de singularidad en las proximidades de estos puntos, varían de modo continuo con la relación de calores específicos  $\gamma$ . para que el tipo de singularidad cambie en un valor de  $\gamma$ , es necesario que para ese valor de  $\gamma$  coincidan dos raíces de las tres dadas por (C6.5) y (C6.6).

Si tomamos una curva cerrada que incluya en su interior a los tres puntos críticos, su índice de Poincaré (suma de los índices de cada punto crítico aislado) permanece constante, aunque los tipos de singularidad en cada punto cambien.

Con los resultados obtenidos para el caso  $\gamma \neq 1$ , podemos describir el tipo de singularidad de cada punto crítico. El punto crítico por donde pasa la solución de (C3.38),  $(V_1^*, P_1^*)$ , es el correspondiente al signo "mas" de la raíz cuadrada en (C6.5). La singularidad en este punto es un puer-to ( $i=-1$ ). Los otros dos puntos críticos, correspondientes a  $(V_2^*, P_2^*)$  (signo "menos" en (C6.5)) y a  $(V_3, P_3)$  (C6.6), son nodos estables ( $i=+1$ ). La posición relativa de la coordenada  $V$  de estos tres puntos críticos es  $V_2^* < V_1^* < V_3$ . El índice de Poincaré de la curva cerrada que englobe a las tres singularidades es  $i_T = 1 + 1 - 1 = 1$ .

Con los resultados obtenidos en el caso  $\gamma \rightarrow \infty$ , el punto crítico por donde pasa la solución  $(V_1^*, P_1^*)$ , es ahora el correspondiente al signo "menos" de la raíz cuadrada de (C6.5). La singularidad en este punto es un nodo estable ( $i=+1$ ). Los otros dos puntos críticos son: un nodo estable ( $i=+1$ ) el correspondiente a  $(V_2^*, P_2^*)$  (signo "más" en (C6.4)), y un puerto ( $i=-1$ ) el correspondiente a  $(V_3, P_3)$ . La posición relativa de la coordenada  $V$  de estos tres puntos es ahora:  $V_1^* < V_3 < V_2^*$ . El índice de Poincaré para los tres puntos críticos es, como en el caso anterior,  $i_T = +1$ .

En ambos casos,  $\gamma \rightarrow 1$  y  $\gamma \rightarrow \infty$ , la pendiente con que la solución de (C3.38) pasa por el punto crítico,  $(V_1^*, P_1^*)$ , es la correspondiente al signo "menos" de la raíz cuadrada en (C4.2).

En los casos en que  $\gamma=1.2, 1.4, 5/3$  y  $3$ , se conoce el valor de  $\theta_0$  por integración numérica de las ecuaciones (Welsh, R.L.; 1967), (Guderley, G.; 1942), (Butler, D.S.; 1954), (Whitham, G.B.; 1974). Para  $\gamma=1.2, 1.4$  y  $5/3$  todo ocurre como en el caso expuesto de  $\gamma \rightarrow 1$  y, por el contrario, para  $\gamma=3$  todo ocurre como lo expuesto en el caso  $\gamma \rightarrow \infty$ .

Dado que la posición relativa de los puntos críticos pasa de ser  $V_2^* < V_1^* < V_3$  a  $V_1^* < V_3 < V_2^*$ , la raíz  $V_2^*$  se iguala primero a  $V_1^*$  y después a  $V_3$  para dos valores de  $\gamma$ ,  $\gamma_{c1}$  y  $\gamma_{c2}$  respectivamente, que han de estar comprendidos entre  $5/3$  y  $3$ . Antes de que las raíces  $V_2^*$  y  $V_1^*$  coincidan sus singularidades son un nodo ( $i=+1$ ) y un puerto ( $i=-1$ ) respectivamente. Cuando  $\gamma=\gamma_{c1}$ ,  $V_2^* = V_1^*$  y el índice de Poincaré de las dos singularidades es nulo; por lo tanto, el punto crítico correspondiente a  $V_3$  sigue siendo un nodo ( $i=+1$ ) para que el índice de las tres singularidades se mantenga constante e igual a 1. Cuando  $\gamma_{c1} < \gamma < \gamma_{c2}$  la posición relativa de las tres singularidades es  $V_1^* < V_2^* < V_3$ ; siendo ahora la singularidad correspondiente a  $V_1^*$  un nodo ( $i=+1$ ), la correspondiente a  $V_2^*$  un puerto ( $i=-1$ ) y la correspondiente a  $V_3$  todavía un nodo ( $i=+1$ ), ya que no se ha igualado a ninguna otra raíz y no ha podido cambiar de tipo de singularidad.  $V_2^*$  tiene que ser ahora un puerto (y por lo tanto  $V_1^*$  un nodo), porque en caso contrario no habría posibilidad de que  $V_2^*$  se hiciese mayor que  $V_3$ , ya que cuando  $V_2^* = V_3$  el índice de Poincaré de las tres singularidades no sería +1.

En las Figs. C13 y C14 se han representado las tres raíces  $V_1^*$ ,  $V_2^*$  y  $V_3$  como función de  $\gamma$  con ayuda de los resultados obtenidos en los dos ca sos resueltos ( $\gamma \rightarrow 1$  y  $\gamma \rightarrow \infty$ ) y los valores de  $\theta_0$  que se conocen para  $\gamma=1.2, 1.4, 5/3$  y  $3$ .

Obsérvese que cuando  $\gamma < \gamma_{c1}$ ,  $V_1^*$  está dada por (C6.5) con el signo "más", mientras que para  $\gamma > \gamma_{c1}$  esta dada por la misma ecuación con el signo "menos". Por lo tanto, podemos escribir la raíz  $V_1^*$  de la forma:

$$V_1^* = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\theta_0(\gamma-2)}{j\gamma} \right] + \frac{\gamma_{c1}-\gamma}{|\gamma_{c1}-\gamma|} \sqrt{\frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{\theta_0(\gamma-2)}{j\gamma} \right]^2 + \frac{2\theta_0}{j\gamma}} \quad (C6.21)$$

La pendiente de (C3.38) en el punto crítico ( $V_1^*$ ,  $P_1^*$ ) es:

$$\left( \frac{dP}{dV} \right)^* = \frac{b - c - \sqrt{(b-c)^2 + 4ae}}{2e} \quad (C6.22)$$

Las ecuaciones (C6.21) y (C6.22) son válidas para todo  $\gamma(1 \leq \gamma \leq \infty)$ .

En la Fig. C12 se ha representado el valor de  $\theta_0$  como función de  $\gamma$  con los resultados obtenidos para  $\gamma \rightarrow 1$  y  $\gamma \rightarrow \infty$ , así como con los cono cidos en la literatura para  $\gamma=1.2, 1.4, 5/3$  y  $3$ .

En la Fig. C15 se han representado las tres singularidades correspon<sub>ientes</sub> a  $V_1^*$ ,  $V_2^*$  y  $V_3$  en los casos:  $\gamma < \gamma_{c1}$ ;  $\gamma_{c1} < \gamma < \gamma_{c2}$  y  $\gamma > \gamma_{c2}$ .

Cuando  $\gamma = \gamma_{c1}$ ,  $V_1^* = V_2^*$ ; al anular el radicando de (C4.1) o (C6.5) se obtiene:

$$\theta_0 = -j\gamma_{c1}/(\sqrt{\gamma_{c1}} + \sqrt{2})^2 ; \quad V_1^* = V_2^* = \sqrt{2}/(\sqrt{\gamma_{c1}} + \sqrt{2}) \quad (C6.23)$$

En las Figs. C13 y C14 puede observarse que los valores de  $\gamma_{c1}$  en los

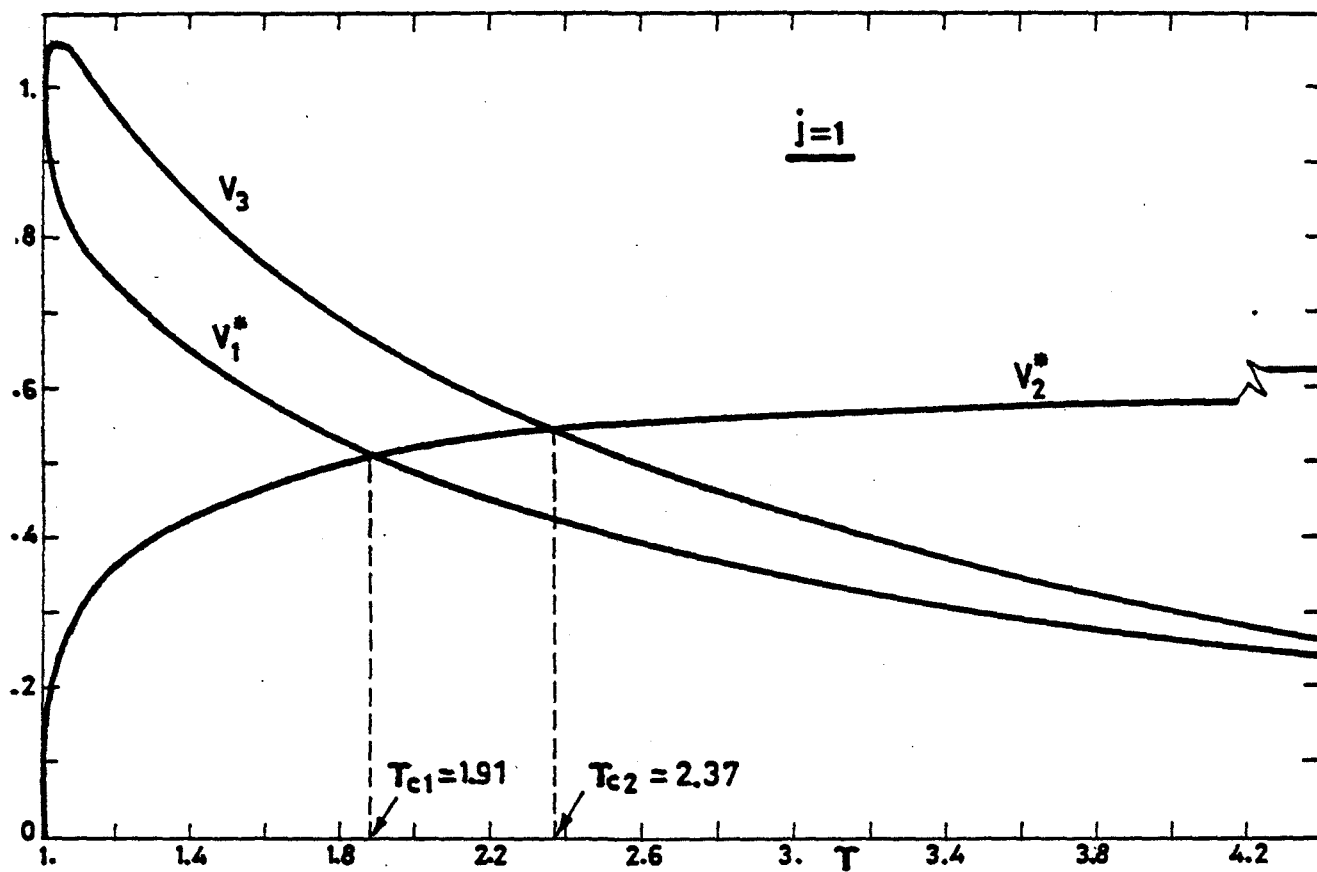


Fig. C13.- Coordenada  $V$  de los puntos críticos como función de  $\gamma$ . Caso cilíndrico.

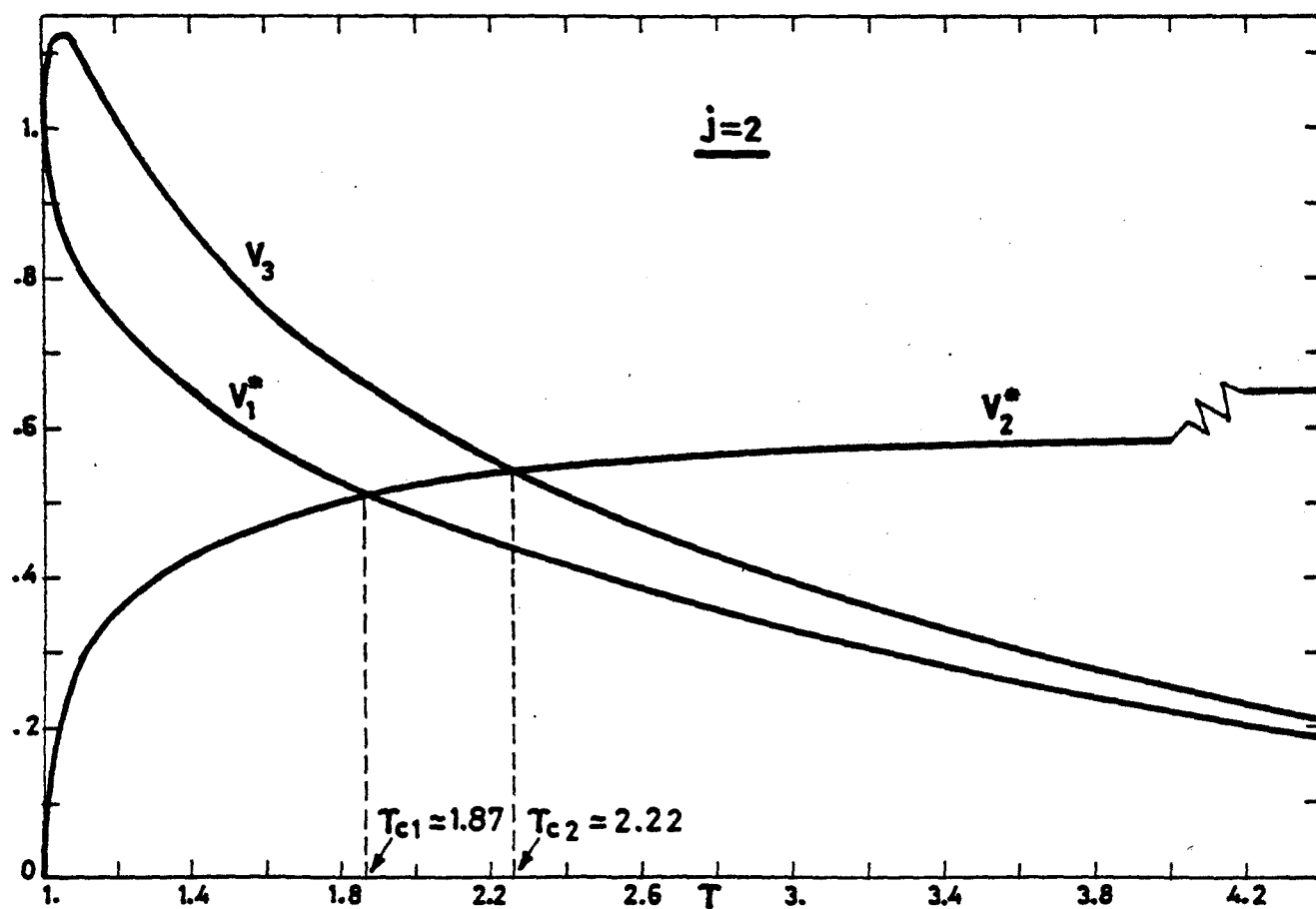


Fig. C14.- Coordenada  $V$  de los puntos críticos como función de  $\gamma$ . Caso esférico.

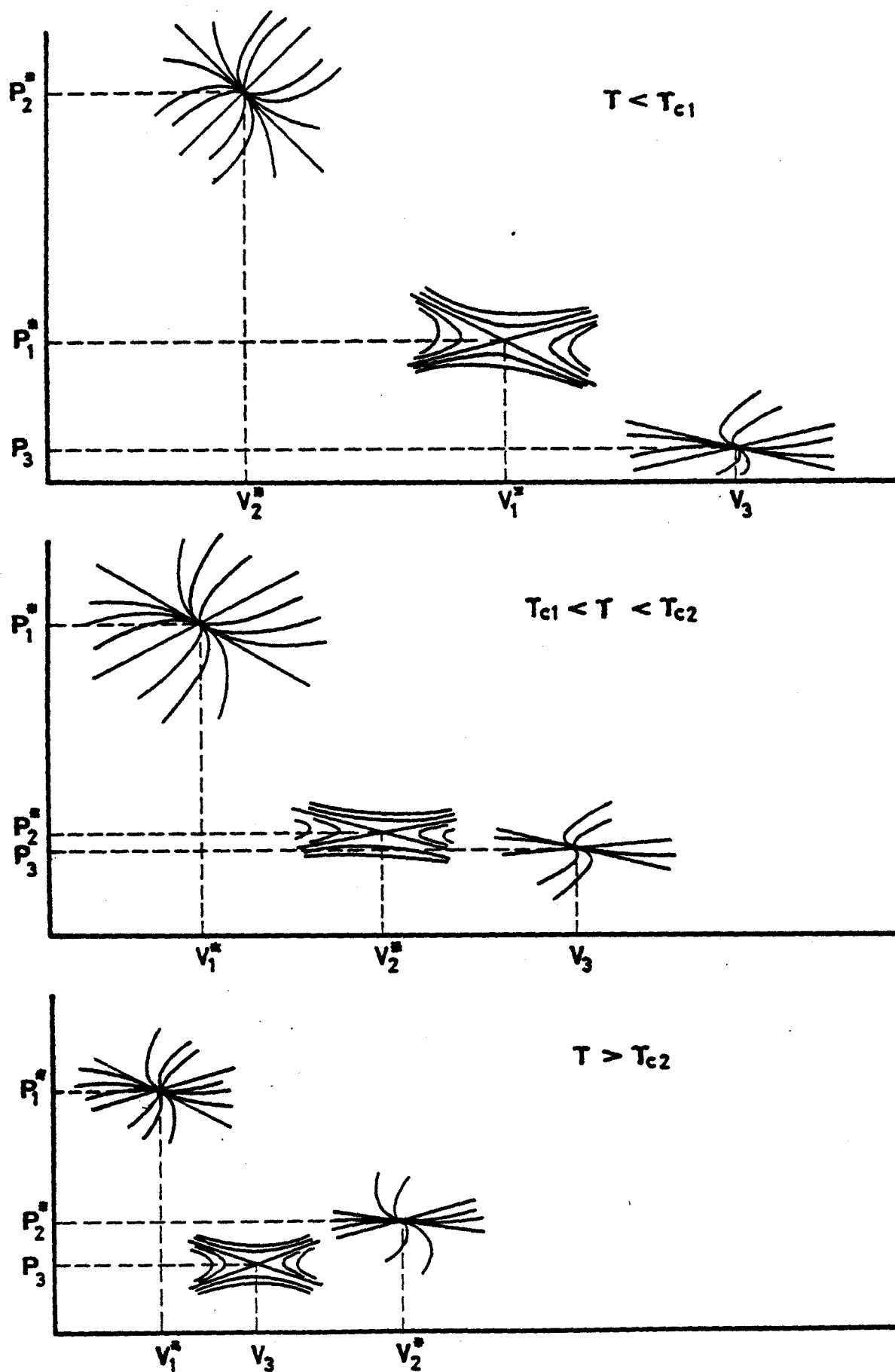


Fig. C15.- Posición relativa de los puntos críticos en los casos  $\gamma < \gamma_{c1}$ ,  $\gamma_{c1} < \gamma < \gamma_{c2}$  y  $\gamma > \gamma_{c2}$ . La solución buscada pasa por  $(V_1^*, P_1^*)$ .

dos casos, cilíndrico y esférico, prácticamente coinciden. En el caso esférico, ( $j=2$ ), el valor de  $\gamma_{c1}$  ha sido acotado por Welsh (Welsh, R.L.; 1967) entre  $1.865 < \gamma_{c1} < 1.875$ .

## 7.- CONCLUSIONES.

Con lo expuesto en este capítulo, se obtiene una idea clara de como debe realizarse la integración numérica de las ecuaciones que determinan el campo fluido detrás de la onda de choque en las últimas etapas de la implosión.

Cuando la onda de choque llega al centro ( $R_s=0$ ), la zona de validez de la solución de semejanza (que es del orden de  $R_s$ ) tiende a cero y la solución que se obtiene para  $\xi \rightarrow \infty$  ( $V \rightarrow 0$ ), dada por las ecuaciones (C6.14), (C6.15) y (C6.16), representan el campo fluido que existe en las proximidades del origen en el instante en que se inicia la reflexión de la onda de choque. Por la rápida evolución de este campo fluido, el campo con que se encuentra la onda reflejada no es éste, sino que es el determinado por la solución de (C3.38) continuada para valores negativos de  $V$ . Puesto que la integración numérica falla al acercarse al punto crítico (0,0), es necesario utilizar el comportamiento (C6.14) a (C6.16) para pasar analíticamente desde valores pequeños positivos de  $V$  a valores pequeños negativos y continuar después la integración numérica. El estado del fluido que encuentra la onda de choque reflejada y la distribución de presiones, densidades y velocidades detrás de ella, se analizará en un trabajo posterior.

La solución asintótica para  $\gamma \rightarrow 1$ , nos permite obtener una solución analítica de las ecuaciones (C3.38), (C3.39) y (C3.40), aparte de proporcionarnos unas expresiones analíticas para el autovalor  $\theta_0$  y las constantes  $R_\infty$ ,  $M$  y  $Z_\infty$  en la zona de validez de la solución.

Según se observa en la Fig. C12, el valor real de  $\theta_0$  como función de  $\gamma$  y el valor aproximado de  $\theta_0$  en las proximidades de  $\gamma_{c1}$ ,  $\theta_0 = -i\gamma/(\sqrt{\gamma} + \sqrt{2})^2$  representado por líneas discontinuas, prácticamente coinciden en un margen relativamente amplio de  $\gamma$  alrededor de  $\gamma_{c1}$ . Por lo tanto, tenemos determinado

de una forma aproximada el valor del autovalor  $\theta_0$  desde  $\gamma=1$  hasta valores de  $\gamma \approx 2.5$ . Para  $j=1$  la aproximación anterior (C6.23) es mejor que para  $j=2$ .

Los resultados del análisis numérico que se está realizando, nos permiten obtener los valores de  $\gamma_{c1}$  y  $\gamma_{c2}$  en los casos cilíndrico y esférico. Estos valores se adelantan en la tabla C04.

j	$\gamma_{c1}$	$\gamma_{c2}$
1	1.9095	2.3677
2	1.8697	2.2216

Tabla C04.- Valores de  $\gamma$  donde cambia el tipo de singularidad de los puntos críticos. Caso cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ).



## APENDICE C-I

### 1.- INTRODUCCION.

En este apéndice calcularemos las trayectorias de las partículas fluidas, esto es, la evolución temporal de los radios de las distintas capas fluidas. Una vez conocidas estas trayectorias, podremos determinar la evolución temporal de la presión a que están sometidas las mismas.

Si sometemos una esfera (cilindro) de radio  $R_0$  a una ley de presiones exterior,  $p_s(t)$ , idéntica a la que está sometida una capa fluida, que se mueva de acuerdo con la ley que se obtenga mediante la solución de semejanza, esta solución de semejanza describirá todo el proceso implosivo en la esfera.

### 2.- TRAYECTORIAS.

Las trayectorias de las partículas están dadas por la ecuación,

$$\frac{dr_p}{dt} = u\{r_p(t), t\} \quad (C-I.1)$$

Mientras la onda de choque no alcance un radio determinado, todas las partículas que se encuentran en este radio permanecen en él. Cuando las partículas son alcanzadas por la onda de choque, ésta las pone en movimiento de acuerdo con la ecuación (C-I.1).

Si utilizamos las variables  $\xi$  y  $\phi$ , dadas por (C3.4) y (4.3) respectivamente, la ecuación (C-I.1) toma la forma:

$$d\xi_p / \{\xi_p - \phi(\xi_p)\} = - \{1/(1-\theta_0)\} (dt/t) \quad (C-I.2)$$

ecuación que, escrita en las variables de semejanza (C3.16) y (C3.19), se reduce a,

$$\frac{t}{t_0} = \exp \left\{ (\theta_0 - 1) \int_0^{Z_p} \frac{dZ}{1-V(Z)} \right\} \quad (C-I.3)$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} \ln(r_p/r_{p0}) &= - \int_0^{Z_p} V(Z) dZ / \{1-V(Z)\} \\ \text{o bien:} \\ \ln(r_p/r_{p0}) &= Z + \{1/(1-\theta_0)\} \ln(t/t_0) \end{aligned} \right\} \quad (C-I.4)$$

Las ecuaciones (C-I.3) y (C-I.4) proporcionan la ecuación de las trayectorias en forma paramétrica.

El instante  $t_0$  es aquél en el que la onda de choque alcanza a la partícula. En ese instante, el radio de la partícula coincide con el de la onda ( $r_{p0} = R_s(t_0)$ ). Con ayuda de (C3.14) se puede escribir:

$$Ct_0 = r_{p0}^{1-\theta_0} \quad (C-I.5)$$

Cuando la onda de choque llega al centro ( $t=0$ ), la capa fluida que se encontraba en  $r_p = r_{p0}$  en el instante de paso de la onda ( $t=t_0$ ), se encuentra ahora a una distancia del centro  $r_p = r_{pF}$  dada por (C-I.4) particu-larizada en  $t=0$  ( $Z \rightarrow \infty$ ), es decir

$$(r_{pF}/r_{p0}) = e^K$$

donde K viene dado por:

$$K = - \int_0^{\infty} v(z) dz / \{1 - v(z)\} \quad (C-I.6)$$

K es un valor finito que depende únicamente de la relación de calores específicos  $\gamma$  y de  $j$ .

### 3.- PRESION A QUE ESTA SOMETIDA LA CAPA FLUIDA.

Una capa fluida que no ha sido alcanzada por la onda de choque, se encuentra en reposo a presión nula. Cuando la onda de choque llega a su posición, su presión sube bruscamente al valor que tiene inmediatamente detrás de la onda. Posteriormente su presión evoluciona de acuerdo con la ecuación:

$$p_p = p_p \{r_p(t), t\}$$

donde  $r_p = r_p(t)$  es la ecuación de la trayectoria de la capa fluida.

De acuerdo con las definiciones (4.3), la presión se puede escribir como:

$$p_p \{r_p(t), t\} = \rho_0 D^2(t) f(\xi) \quad (C-I.7)$$

ecuación que, escrita en variables de semejanza (C3.17) a (C3.19), se reduce a:

$$p_p(t) = \rho_0 D^2(t) P(Z_p) \exp \{2Z_p + R(Z_p)\} \quad (C-I.8)$$

donde  $Z_p(t)$  se obtiene de (C-I.3).

Dividiendo (C-I.7) por el valor que tiene en el instante en que la partícula es alcanzada por la onda ( $t=t_0$ ), y teniendo en cuenta (C3.34), (C3.35), (C3.37) y (C-I.4), se obtiene:

$$\{p_p(t)/p_{p0}(t_0)\} = \frac{\gamma+1}{2} P(Z_p) \exp \{2(1-\theta_0)Z_p + R(Z_p) + 2\theta_0 \ln(r_p/r_{p0})\} \quad (C-I.9)$$

La ecuación (C-I.9), junto con la ecuación de la trayectoria (C-I.3), permite obtener la ley de presiones a que esta sometida una partícula fluida en función del tiempo.

Cuando la onda de choque llega al centro ( $t=0$ ), hemos visto que la capa fluida se encuentra a una distancia del centro dada por ( $r_{pF}/r_{p0}$ ). En ese mismo instante, la presión a que esta sometida la capa fluida viene dada por:

$$(p_{pF}/p_{p0}) = \frac{\gamma+1}{2} M \exp \{2(1-\theta_0)Z_\infty + R_\infty + 2\theta_0 K\} \quad (C-I.10)$$

para obtener estas expresiones hemos utilizado las ecuaciones (C6.14), (C6.15) y (C6.16).

A continuación se determinan las trayectorias y presiones de una partícula fluida en los casos límites  $\gamma \rightarrow \infty$  y  $(\gamma-1) \rightarrow 0$ .

#### 4.- TRAYECTORIA Y PRESION DE UNA PARTICULA FLUIDA EN EL CASO $\gamma \rightarrow \infty$ .

En la sección (5.1) del capítulo C se ha visto que cuando  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $V_p/V_{p0} \rightarrow 1/\gamma \rightarrow 0$ . En estas condiciones, la ecuación (C-I.3) se reduce a:

$$t/t_0 = \exp\{(\theta_0 - 1)Z_p\} \quad (C-I.11)$$

mientras que la ecuación (C-I.4), en primera aproximación nos dará:

$$\ln(r_p/r_{p0}) = 0 \quad ; \quad r_p = r_{p0} \quad (C-I.12)$$

es decir, las partículas no se moverían al paso de la onda de choque. Si retenemos un término más (del orden de  $1/\gamma$ ), escribiendo:

$$r_p = r_{p0} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \bar{r}_p\right) \quad (C-I.13)$$

la ecuación (C-I.4) se reduce a:

$$\int_0^{Z_p} \gamma V(Z) dZ = -\bar{r}_p = \gamma \left(1 - \frac{r_p}{r_{p0}}\right) \quad (C-I.14)$$

La presión a que esta sometida la partícula fluida (C-I.9), para  $\gamma \rightarrow \infty$  queda reducida a:

$$\frac{p_p(t)}{p_{p0}(t_0)} = \frac{\gamma P(Z_p)}{2} \exp\{2(1-\theta_0)Z_p\} \quad (C-I.15)$$

su valor cuando la onda de choque llega al centro (C-I.10) se reduce a:

$$(p_{pF}/p_{p0}) = (M/2) \exp\{2(1-\theta_0)Z_\infty\} \quad (C-I.16)$$

donde  $M$  y  $Z_\infty$  estan dados en la tabla C03.

En las Figs. C-I.01 y C-I.02 se han representado la trayectoria y presión de una partícula fluida, respectivamente, como función del tiempo. En la Fig. C-I.01 no se ha representado exactamente la trayectoria puesto que en primera aproximación es  $r_p = r_{p0}$ , sino que se ha representado el término de perturbación  $\gamma(1-r_p/r_{p0})$ . Para la representación de estas curvas se han utilizado los valores numéricos dados en la tabla C02.

##### 5.- TRAYECTORIA Y PRESION DE UNA PARTICULA FLUIDA EN EL CASO $(\gamma-1) \rightarrow 0$ .

En el caso asintótico  $(\gamma-1) \rightarrow 0$  la expresión de  $Z$  como función  $V$  la hemos obtenido mediante dos desarrollos asintóticos, válidos en distintas zonas del intervalo  $0 < V < 1$ , y dados por las ecuaciones (C5.2.14) y (C5.2.15).

En las proximidades del punto crítico y hasta la onda de choque obtuvimos en (C5.2.14):

$$Z(\eta) = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{2} \eta - j \ln\left(1 + \frac{\sqrt{2} \eta}{j+1}\right) \right\}$$

siendo  $\eta = (1-V)/\sqrt{\epsilon} \sim 0(1)$ .

Según esta ecuación, (C-I.3) se reduce a:

$$d \{ \ln(t/t_0) \} = - \left\{ 1 - \frac{j}{(j+1)+\sqrt{2} \eta} \right\} \frac{d(\sqrt{2} \eta)}{\sqrt{2} \eta} \quad (C-I.17)$$

y (C-I.4) se reduce a:

$$d \{ \ln(r_p/r_{p0}) \} = - \left\{ 1 - \frac{j}{(j+1)+\sqrt{2} \eta} \right\} \frac{d(\sqrt{2} \eta)}{\sqrt{2} \eta} \quad (C-I.18)$$

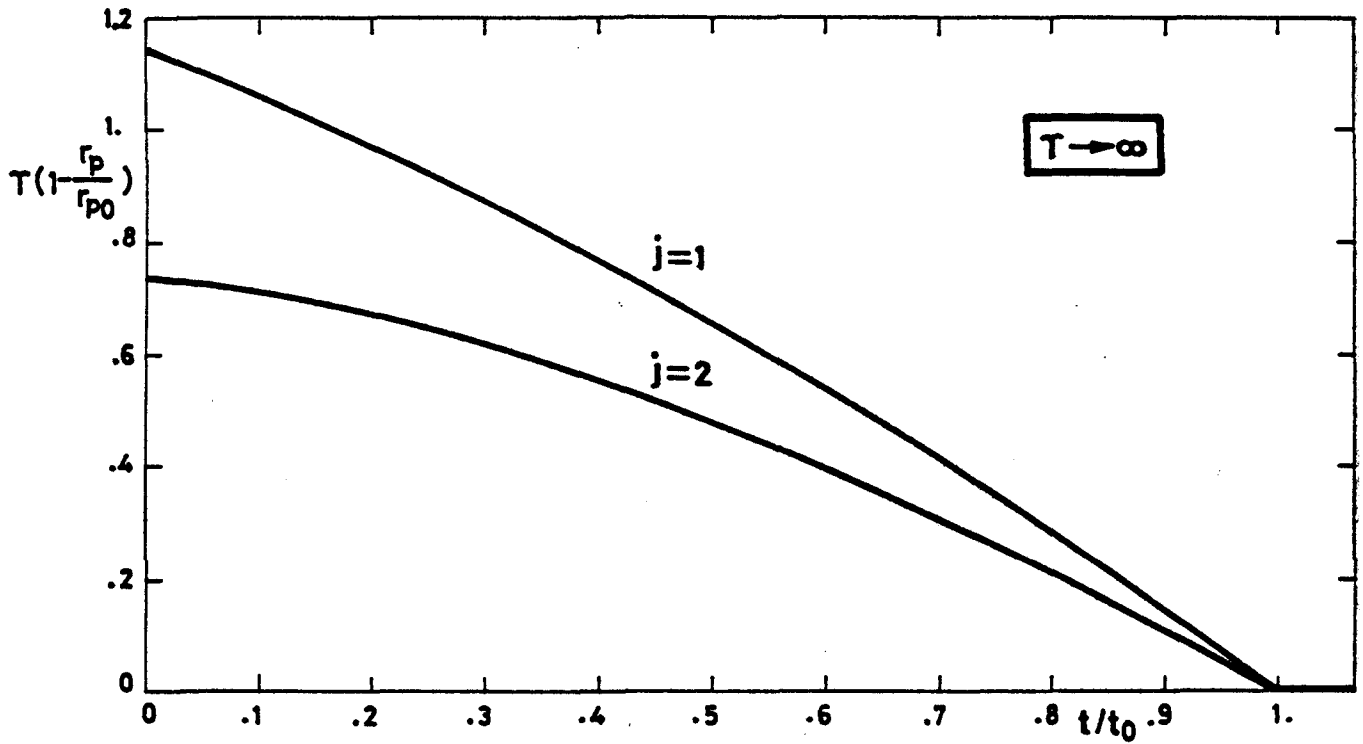


Fig. C-I.01.- Trayectoria de las capas fluidas en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ). Solución válida para valores grandes de  $\gamma$ .

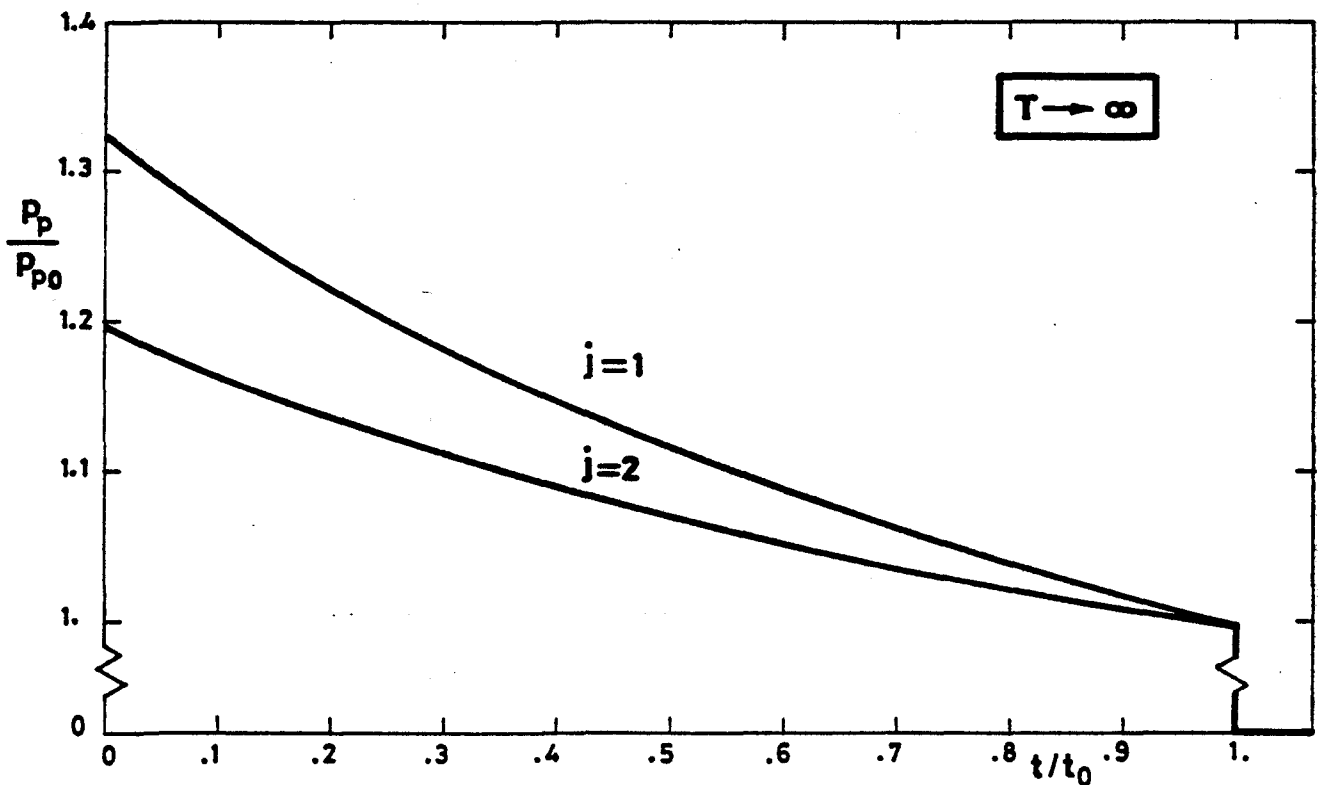


Fig. C-I.02.- Presión a que están sometidas las capas fluidas en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ) como función del tiempo. Solución válida para valores grandes de  $\gamma$ .

Es decir, para  $V-1 \sim 0(\sqrt{\epsilon})$  las trayectorias serían rectas ( $r_p/r_{p0} = t/t_0$ ). De (C-I.17) y (C-I.18) se obtiene:

$$\ln(t/t_0) = \ln(r_p/r_{p0}) = - \int_{\eta_0}^{\eta_p} \left\{ 1 - \frac{j}{(j+1)\sqrt{2}\eta} \right\} \frac{d(\sqrt{2}\eta)}{\sqrt{2}\eta} \quad (C-I.19)$$

donde  $\eta_0$  es el valor de  $\eta$  cuando  $Z=0$ ;  $\eta_0 = \sqrt{\epsilon}/2$ .

La ecuación (C-I.19) se puede integrar para darnos:

$$\ln\left(\frac{r_p}{r_{p0}}\right) = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) = - \frac{1}{j+1} \left\{ \ln\left(\frac{2\eta_p}{\sqrt{\epsilon}}\right) + j \ln \left[ \frac{(j+1)+\sqrt{2}\eta_p}{(j+1)+\sqrt{\epsilon}/2} \right] \right\} \quad (C-I.20)$$

Cuando  $(1-V) \sim 0(1)$ , la ecuación (C5.2.15) nos dá:

$$Z = - (1 - j\sqrt{\epsilon}/2) \ln V - j\sqrt{\epsilon}/2 \ln \{ \sqrt{2/\epsilon} (1-V)/(j+1) \}$$

Según esta expresión de  $Z(V)$ , la ecuación (C-I.3) se reduce a:

$$d \{ \ln(t/t_0) \} = dV/V(1-V) - j\sqrt{\epsilon}/2 dV/(1-V)^2 \quad (C-I.21)$$

mientras que (C-I.4) queda:

$$d \{ \ln(r_p/r_{p0}) \} = dV/(1-V) - j\sqrt{\epsilon}/2 dV/(1-V)^2 \quad (C-I.22)$$

Dado que estas ecuaciones no son válidas cerca de la onda de choque ( $Z=0$ ), van a quedar indeterminadas a falta de una constante de integración. Constante que determinaremos al acoplar con el desarrollo (C-I.21).



Las ecuaciones (C-I.21) y (C-I.22) quedan:

$$\ln(t/t_0) = \ln v_p - \ln(1-v_p) - j\sqrt{\epsilon/2} / (1-v_p) + C_1 \quad (C-I.23)$$

$$\ln(r_p/r_{p0}) = -\ln(1-v_p) - j\sqrt{\epsilon/2} / (1-v_p) + C_2 \quad (C-I.24)$$

La ecuación (C-I.20) desarrollada para  $\eta_p$  grande se reduce a:

$$\ln(t/t_0) = \ln(r_p/r_{p0}) + - \ln \eta_p - \frac{1}{j+1} \ln\left(\frac{2}{\sqrt{\epsilon}}\right) - \frac{j}{j+1} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{j+1}\right) - \frac{j}{\sqrt{2} \eta_p} \quad (C-I.25)$$

mientras que (C-I.23) y (C-I.24) desarrolladas para  $(1-v_p)$  pequeñas ( $v_p \rightarrow 1-\sqrt{\epsilon} \eta$ ) quedan:

$$\ln(t/t_0) \rightarrow - \ln \eta_p - \ln \sqrt{\epsilon} - \frac{j}{\sqrt{2} \eta_p} + C_1 \quad (C-I.26)$$

$$\ln(r_p/r_{p0}) \rightarrow - \ln \eta_p - \ln \sqrt{\epsilon} - \frac{j}{\sqrt{2} \eta_p} + C_2 \quad (C-I.27)$$

Puesto que (C-I.26) y (C-I.27) han de acoplar con (C-I.25), las cons tantes  $C_1$  y  $C_2$  son:

$$C_1 = C_2 = \frac{j+2}{j+1} \ln \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} + \frac{j}{j+1} \ln(1+j) \quad (C-I.28)$$

Con (C-I.29), (C-I.23), (C-I.24) y (C-I.28) construimos unas soluciones uniformemente válidas para todo  $V$ , que se reducen a:

$$\ln(r_p/r_{p0}) = -\frac{1}{j+1} \left\{ \ln \left[ \frac{2(1-V_p)}{\epsilon} \right] + j \ln \left[ \frac{(j+1)+(1-V_p)\sqrt{2/\epsilon}}{(i+1) + \sqrt{\epsilon/2}} \right] \right\} \quad (C-I.29)$$

$$\ln(t/t_0) = \ln \{ V_p / (1-\epsilon/2) \} + \ln(r_p/r_{p0}) \quad (C-I.30)$$

Las ecuaciones (C-I.29) y C-I.30 representan la ecuación paramétrica de las trayectorias de las partículas fluidas. En la Fig. C-I.03 se han representado las trayectorias de las partículas, dadas por las ecuaciones anteriores, para distintos valores de  $\gamma$  ( $\gamma = 1+\epsilon$ ). Cuando  $\gamma=1$  ( $\epsilon=0$ ) las trayectorias se reducen a  $(r_p/r_{p0}) = (t/t_0)$ , según se deduce de (C-I.23), (C-I.24) y (C-I.28).

Cuando  $t=0$  ( $V_p=0$ ), de (C-I.29) se obtiene:

$$\ln(r_{pF}/r_{p0}) = K = \frac{1}{j+1} \left\{ \frac{j+2}{2} \ln(\epsilon/2) + j \ln(j+1) \right\} \quad (C-I.31)$$

Para determinar la presión a que están sometidas las partículas fluidas, utilizaremos la ecuación (C-I.9), que se puede escribir de la forma:

$$\{P_p(t)/p_{p0}(t_0)\} = P(V_p) \exp \{ 2(1+j\sqrt{\epsilon/2})Z(V_p) + R(V_p) - 2j\sqrt{\epsilon/2} \ln(r_p/r_{p0}) \} \quad (C-I.32)$$

donde  $P(V_p)$ ,  $Z(V_p)$ ,  $R(V_p)$  y  $(r_p/r_{p0})$ , así como  $V_p(t)$ , están dadas en (C5.2.16), (C5.2.18), (C5.2.19), (C-I.29) y (C-I.30) respectivamente.

En el instante en que la onda de choque llega al centro ( $t=0$ ) se obtiene (C-I.10):

$$(p_{pF}/p_{p0}) = M \exp \{ 2(1+j\sqrt{\epsilon/2})Z_{\infty} + R_{\infty} - 2j\sqrt{\epsilon/2} K \} \quad (C-I.33)$$

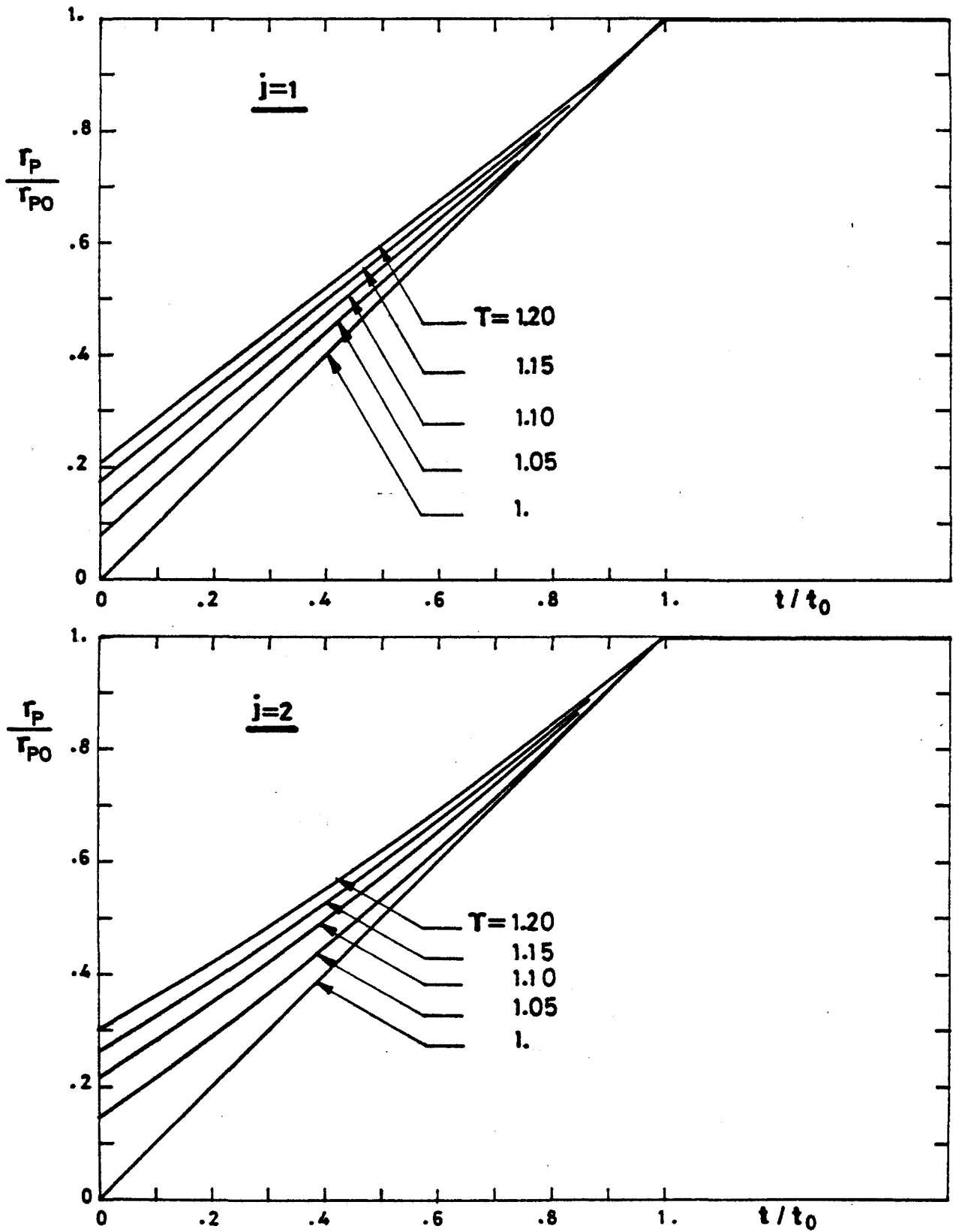


Fig. C-I.03.- Trayectorias de las capas fluidas en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ). Solución válida para  $\gamma$  próximo a la unidad.

Los valores de  $M$ ,  $Z_{\infty}$ ,  $R_{\infty}$  y  $K$  estan dados por (C5.2.17), (C5.2.19) (C5.2.20) y (C-I.31).

En la Fig. C-I.04 se ha representado la presión a que estan sometidas las partículas fluidas como función del tiempo, para distintos valores de  $\gamma$  ( $\gamma = 1+\epsilon$ ).

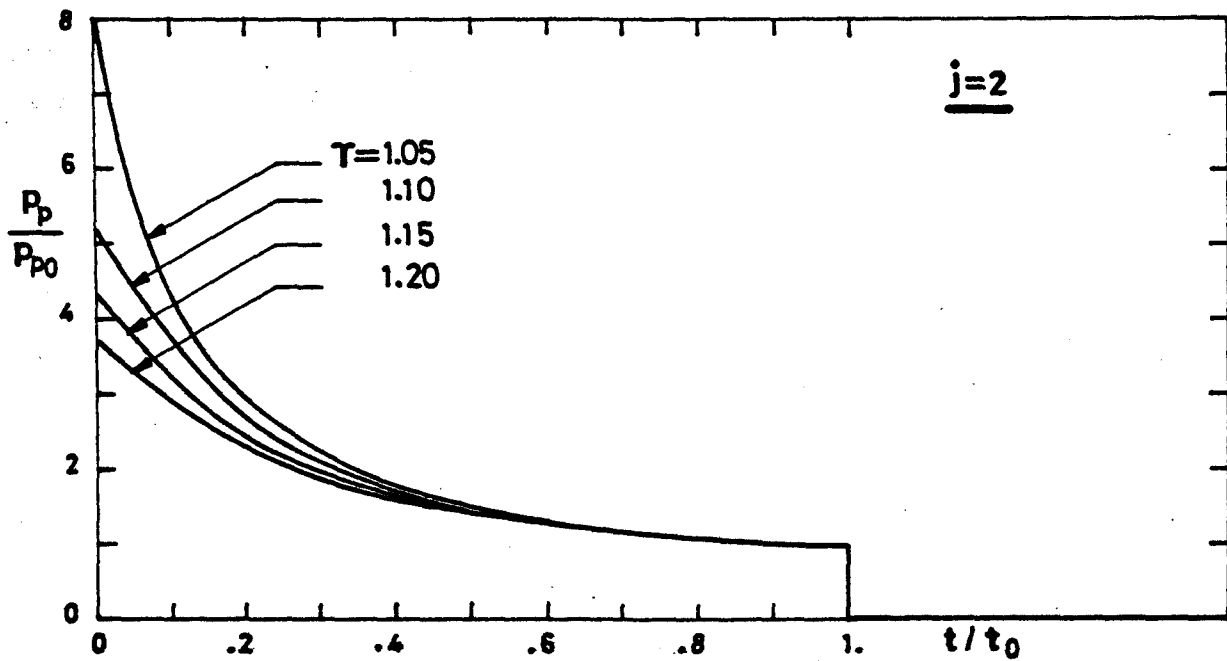
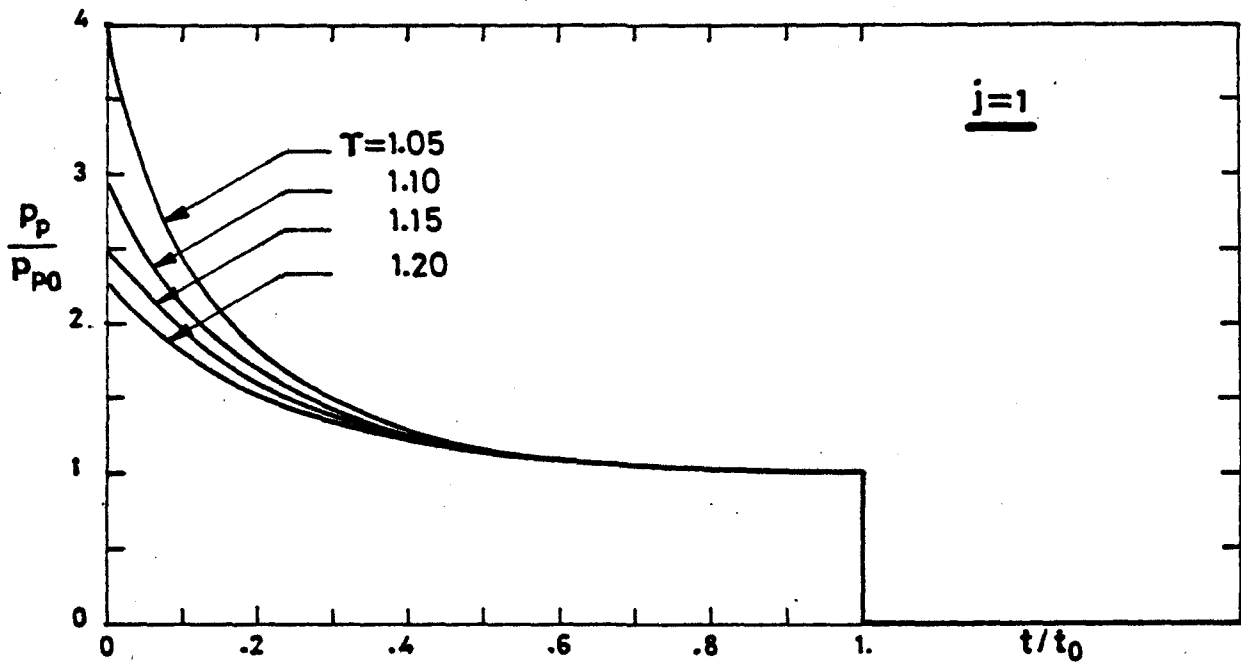


Fig. C-I.04.- Presión a que están sometidas las capas fluidas en los casos cilíndrico ( $j=1$ ) y esférico ( $j=2$ ), como función del tiempo. Solución válida para  $\gamma$  próximo a la unidad.

REFERENCIAS

- AGUILAR, F.B.; "Los Explosivos y sus Aplicaciones", J.E.N.; Madrid, (1972).
- AL'TSHULER, L.V., KRUPNIKOV, K.K. y BRAZHNİK, M.I.; Soviet Phys. JETP, 34(7), 4, (1958), 614-19.
- AL'TSHULER, L.V., KRUPNIKOV, K.K., LEDENEV, B.N., ZHUCHIKHIN, V.I. y BRAZHNİK, M.I.; Sov. Phys. JETP, 34(7), 4, (1958), 606-14.
- BUTLER, D.S.; "Converging Spherical and Cylindrical Shocks", Rep. Nº 54/54, Armament Research and Development Establishment, Ministry of Supply, Fort Halstead, Kent, (1954).
- COLE, J.D.; "Perturbation Methods in Applied Mathematics", Ed. Blaisdell Pub. Co., Waltham, Mass., (1968).
- COURANT, R. y FRIEDRICHS, K.O.; "Supersonic Flow and Shock Waves", (Cap. 2 y 6B), Ed. Interscience Pub., Inc., New York, (1948).
- DRUMMOND, W.E., J. Appl. Phys., 28, 12, (1957), 1437-41.
- FERRO FONTAN, C., GRATTON, J. y GRATTON, R.; Phys. Lett. 55A, 1, (1975), 35-37.
- FICKETT, W.; Quart. of App. Math. 32, 1, (1974), 71-84.
- GUDERLEY, G.; Luftfahrtforschung, 19, (1942), 302-12.
- LANDAU, L.D. y LIFSHITZ, E.M.; "Fluid Mechanics", (Cap. 9, 10 y 14), Ed. Pergamon, London, (1959).
- MILLER, D.; Proceedings of the Conference on Safety, Fuels, and Core Design in Large Fast Power Reactors, ANL, Rep. ANL-7120, (1965), 641-53.

PERSSON, P.A. y PERSSON, I.; "Determination of State Data for Uranium at High Pressures by Means of Shock Wave Experiments", Translated from FOA 2, Rep. A 2299-222, Stockholm, (1964), 43.

SEDOV, L.I.; "Similarity and Dimensional Methods in Mechanics", (Cap. 4), Ed. Academic Press, New York, (1959).

SOMON, J.P.; en "Physics of High Energy Density", Academic Press, New York, (1971), 189-215.

STANYUKOVICH, K.P.; "Unsteady Motion of Continuous Media", (Cap. 1, 2, 8 y 9), Ed. Pergamon, (1960).

TAYLOR, G.I.; Proc. Roy. Soc. A 201, (1950), 159-74.

THIEL, M; "Compendium of Shock Wave Data", UCRL-50108, (1966) 1-13.

WALSH, J.M. y CHRISTIAN, R.H., Phys. Rev., 97, 6, (1955), 1544-56.

WELSH, R.W.; J. Fluid Mech., 29, (1967), 61-79.

WHITHAM, G.B.; "Linear and Nonlinear Waves", (Cap. 5 y 6), Ed. John Wiley & Sons, New York, (1974).

ZEL'DOVICH, Ya. B. y RAIZER, Yu. P.; "Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena", (Cap. 11 y 12), Ed. Academic Press, New York, (1967), vol. 2.